۱. گزینه ۲ درست است.

۲.گزینه ۴ درست است

۳.گزینه ۱ درست است

۴.گزینه ۱ درست است

۵.گزینه ۳ درست است

۶.گزینه ۲ درست است

۷.گزینه ۴ درست است

۸.گزینه ۳ درست است

۹.گزینه ۳ درست است

۱۰. گزینه ۲ درست است

۱۱. گزینه ۴ درست است

۱۲. گزینه ۱ درست است

۱۳. گزینه ۲ درست است

۱۴. گزینه ۳ درست است

۱۵. گزینه ۴ درست است

۱۶. گزینه ۱ درست است

۱۷. گزینه ۲ درست است

۱۸. گزینه ۳ درست است

۱۹. گزینه ۴ درست است

۲۰. گزینه ۲ درست است

۲۱. گزینه ۱ درست است

۲۲.گزینه ۴ درست است

۲۳.گزینه ۲ درست است

۲۴.گزینه ۳ درست است

۲۵.گزینه ۳ درست است

۲۶.گزینه ۴ درست است

۲۷.گزینه ۱ درست است

۲۸.گزینه ۴ درست است

۲۹.گزینه ۴ درست است

۳۰.گزینه ۲ درست است

۳۱. گزینه ۲ درست است.

$$y = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$L = \int_1^8 \sqrt{1+\frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}}\,dx = \int_1^8 \sqrt{\frac{9\sqrt[3]{x^2}+4}{9\sqrt[3]{x^2}}}\,dx = \int_1^8 \frac{\sqrt{9\sqrt[3]{x^2}+4}}{3\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$x^{\frac{2}{3}} = t \Rightarrow \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx = dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \frac{3}{2}dt$$

$$= \int_1^4 \frac{\sqrt{9t+4}}{3}\,\frac{3}{2}dt = \frac{1}{2}\times\frac{1}{9}\times\frac{(9t+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{27}\left(40^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}}\right)$$

۳۲.گزینه ۱ درست است

$$S_y = 2\pi\int_c x\,ds = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = 2\pi\int_0^1 \cancel{x}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\cancel{x}}\,dx$$

$$x = \tan\theta \Rightarrow 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2\theta}\,(1+\tan^2\theta)\,d\theta = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta$$

$$2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta = 2\pi\times\frac{1}{2}\left(\sec\theta\tan\theta + \ln(\sec\theta+\tan\theta)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \pi\left(\left(\sqrt{2}+\ln\sqrt{2}+1\right)\right) = \pi\sqrt{2} + \pi\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

۳۳. گزینه ۴ درست است

$$\sinh c = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{e^c - e^{-c}}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow e^c - e^{-c} = \frac{3}{2}$$

$$e^c = t \quad \Rightarrow \quad t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2 - 1}{t} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{4} \begin{cases} t = 2 \\ t = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} e^c = 2 \quad \Rightarrow \quad c = \ln 2 \\ e^c = \dfrac{-1}{2} \quad \text{غیرممکن} \end{cases}$$

$$\ln\left(e^x - \sqrt{e^{2x} - 1}\right) = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad e^x - \sqrt{e^{2x} - 1} = 2$$

$$e^x - 2 = \sqrt{e^{2x} - 1} \quad \Rightarrow \quad e^x - 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad e^x \geq 2$$

$$\left(e^x - 2\right)^2 = e^{2x} - 1 \quad \Rightarrow \quad e^{2x} - 4e^x + 4 = e^{2x} - 1$$

$$5 = 4e^x \quad \Rightarrow \quad e^x = \frac{5}{4}$$

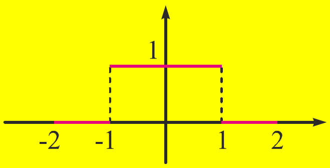
که با توجه به شرط $e^x \geq 2$ جواب حاصل غیرقابل قبول خواهد بود.

۳۴.گزینه ؟ درست است.

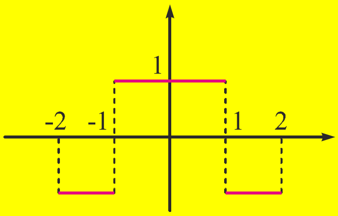
این‌که در سری فوریه نوشته شده فقط جملات کسینوسی موجود است، تصریح می‌کند سری فوریه یک تابع زوج نوشته شده و از آنجا که جمله $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ به صورت $\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$ ظاهر شده بدان معناست که دوره تناوب تابع $P = 2, L = 4$ مدنظر قرار گرفته و $L = 2$ است.

اما مشکلی که وجود دارد این است که شکل ترسیم شده مقدار f را در بازه $0 < x < 1$ را یک نشان می‌دهد و تعریفی برای مقدار f در بازه $1 < x < 2$ صورت نگرفته است.

اولین انتخاب است که مطابق شکل فرک کنیم مقدار تابع در این بازه صفر می‌باشد و در واقع سری فوریه تابع زیر را مدنظر قرار می‌دهیم.



اما تابع مذکور قطعاً دارای ثابت سری فوریه خواهد بود، در حالی که سری فوریه نوشته شده در فرض مسأله چنین جمله‌ای را ندارد. مضافاً سری فوریه مذکور فقط دارای هارمونیک‌های فرد است $(n = 1, 3, 5, \ldots)$ پس باید پذیرفت تابع طوری تنظیم شده که دارای تقارن نیم‌موجی باشد و به تعبیری برای شکل زیر سری فوریه نوشته شده است.



ملاحظه شده با ترسیم قرینه نیم پریود نسبت به خط $y = \frac{a_0}{2} = 0$ و انتقال شکل حاصله به اندازه نیم پریود، بر شکل نیم پریود دیگر منطبق می‌شویم، پس در سری فوریه نوشته شده فقط هارمونیک‌های فرد کسینوسی ظاهر خواهد شد.

اینک داریم:

$$a_3=\frac{3}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{3\pi}{2}x\,dx=\int_0^1 (1)\cos\frac{3\pi}{2}x\,dx+\int_1^2 (-1)\cos\frac{3\pi}{2}x\,dx=\frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2}x\Big|_0^1-\frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2}x\Big|_1^2$$

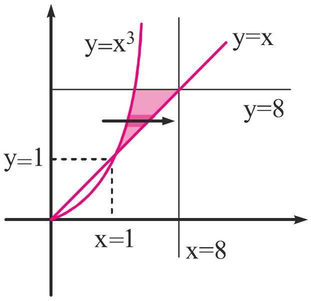
$$=\frac{3}{2\pi}\{(-1-0)-(0+1)\}=\frac{-4}{3\pi}$$

۳۵. گزینه ۳ درست است

$$V=\int_1^2\int_x^{x^3} f(x,y)dydx+\int_2^8\int_x^8 f(x,y)dydx$$

$$D_1:\begin{cases}x=1 \quad , \quad x=2\\ y=x \quad , \quad y=x^3\end{cases} \qquad D_2:\begin{cases}x=2 \quad , \quad x=8\\ y=x \quad , \quad y=8\end{cases}$$

$$D:\begin{cases}x=1 \quad , \quad x=8\\ y=x \quad , \quad y=x^3 \quad , \quad y=8\end{cases}$$



$$V=\int_1^8\int_{\sqrt[3]{y}}^{y} f(x,y)dxdy$$

۳۶. گزینه ۱ درست است

$$u(x,y)=k\left(\ln\cos\left(\frac{x}{k}\right)-\ln\cos\left(\frac{y}{k}\right)\right)+L$$

$$u_x=k\left(\frac{\frac{-1}{k}\sin\frac{x}{k}}{\cos\frac{x}{k}}\right)=-\tan\frac{x}{k} \quad\Rightarrow\quad u_{xx}=-\frac{1}{k}\left(1+\tan^2\frac{x}{k}\right)$$

$$u_y=k\left(-\frac{\frac{-1}{k}\sin\frac{y}{k}}{\cos\frac{y}{k}}\right)=\tan\frac{y}{k} \quad\Rightarrow\quad u_{yy}=\frac{1}{k}\left(1+\tan^2\frac{y}{k}\right)$$

$$u_{xy}=0$$

$$\left(1+u_x^2\right)u_{yy}-uu_xu_yu_{xy}+\left(1+u_y^2\right)u_{xx}=0$$

$$\left(1+\tan^2\frac{x}{k}\right)\frac{1}{k}\left(1+\tan^2\frac{y}{k}\right)-0+\left(1+\tan^2\frac{y}{k}\right)\times\frac{-1}{k}\left(1+\tan^2\frac{x}{k}\right)=0$$

$$\frac{1}{k}\left(1+\tan^2\frac{x}{k}\right)\left(1+\tan^2\frac{y}{k}\right)-\frac{1}{k}\left(1+\tan^2\frac{x}{k}\right)\left(1+\tan^2\frac{y}{k}\right)=0$$

به ازای هر مقدار دلخواه k و L رابطه برقرار است $\quad\Rightarrow\quad 0=0$

۳۷. گزینه ۲ درست است

$$f(x,y)=3x^4-4x^2y+y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=12x^3-8xy=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-4x^2+2y=0$$
$$\begin{cases}4x\left(3x^2-y\right)=0\\-4x^2+2y=0\end{cases}\Rightarrow$$ نقطه بحرانی تابع نقطه $(0,0)$ می‌باشد.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=36x^2-8y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=-8x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$
$$A=36x^2-8y\xrightarrow{(0,0)}A=0$$
$$B=-8x\xrightarrow{(0,0)}B=0 \quad\Rightarrow\quad \Delta=B^2-AC=0 \quad\Rightarrow$$ نتیجه‌ای حاصل نمی‌شود
$$C=2\xrightarrow{(0,0)}C=2$$
$$f(x,y)=3x^4-3x^2y-x^2y+y^2 \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=3x^2\left(x^2-y\right)-y\left(x^2-y\right)$$
$$f(x,y)=\left(x^2-y\right)\left(3x^2-y\right) \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=\left(x^2-y\right)\left(\left(x^2-y\right)+2x^2\right)$$
$$f(x,y)=\left(x^2-y\right)^2+2x^2\left(x^2-y\right)$$

لذا نقطه $(0,0)$ برای تابع یک نقطه زینی می‌باشد چون عامل $2x^2\left(x^2-y\right)$ هم می‌تواند مثبت باشد و هم می‌تواند منفی باشد.

.۳۸ گزینه ۱ درست است

$$\begin{cases}u=x^2+y^2\\r=x^2-2xy^2\end{cases}$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{cases}1=2x\dfrac{\partial x}{\partial u}+2y\dfrac{\partial y}{\partial u}\\0=2x\dfrac{\partial x}{\partial u}-2y^2\dfrac{\partial x}{\partial u}-4xy\dfrac{\partial y}{\partial u}\end{cases}$$
$$(x,y)=(1,2)\begin{cases}1=2\dfrac{\partial x}{\partial u}+4\dfrac{\partial y}{\partial u}\\0=2\dfrac{\partial x}{\partial u}-8\dfrac{\partial x}{\partial u}-8\dfrac{\partial y}{\partial u}\end{cases}$$
$$\begin{cases}2\dfrac{\partial x}{\partial u}+4\dfrac{\partial y}{\partial u}=1\\6\dfrac{\partial x}{\partial u}+8\dfrac{\partial y}{\partial u}=0\end{cases}$$
$$2\frac{\partial x}{\partial u}=-2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial x}{\partial u}=-1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{3}{4}$$

.۳۹گزینه ۳ درست است.

با تقسیم طرفین معادله بر $\cos^2 y$ داریم:

$$\frac{y'}{\cos^2 y}-x\frac{\sin 2y}{\cos^2 y}=xe^{-x^2} \quad\to\quad y'\left(1+\tan^2 y\right)-2x\tan y=xe^{-x^2}$$

با جانشینی $u = \tan y$ که نتیجه می‌دهد.

$$u' = y'\left(1+\tan^2 y\right)$$

معادله تبدیل می‌شود به:

$$u' - 2xu = xe^{-x^2}$$

با حل معادله مرتبه اول خطی فوق نتیجه می‌شود.

$$u = e^{-\int -2xdx}\left\{\int xe^{-x^2}.e^{\int -2xdx}dx + c\right\}$$

$$= e^{x^2}\left\{\int xe^{-x^2}.e^{-x^2}dx + c\right\}$$

$$= e^{x^2}\left\{\int xe^{-2x^2}dx + c\right\} = e^{x^2}\left(-\frac{1}{4}e^{-2x^2} + c\right) \rightarrow$$

$$\tan y = -\frac{1}{4}e^{-x^2} + ce^{x^2} \rightarrow 4\tan y + e^{-x^2} - 4ce^{x^2} = 0$$

۴۰. گزینه ۴ درست است.

$$x\frac{dy}{dx} + \left(3x^2 - 1\right)y = x^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} + \left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)y = x$$

با حل معادله مرتبه اول خطی فوق داریم:

$$y = e^{-\int\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)dx}\left\{\int x.e^{\int\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)dx}dx + c\right\}$$

$$= e^{-\left(x^3 - \ln x\right)}\left\{\int x.e^{x^3 - \ln x}dx + c\right\}$$

$$= e^{-x^3}e^{\ln x}\left\{\int xe^{x^3}e^{-\ln x}dx + c\right\}$$

$$= xe^{-x^3}\left\{\int x\,e^{x^3}\frac{1}{x}dx + c\right\}$$

$$= cxe^{-x^3} + xe^{-x^3}\int e^{x^3}dx$$

۴۱. گزینه ۳ درست است.

معادله مرتبه دوم فاقد y (و نیز فاقد x) است.

با جانشینی‌های $y'' = V'(x) \rightarrow y' = V(x)$ به دست می‌آید.

$$V'(x) + V^2(x) + 1 = 0 \rightarrow \frac{dV}{dx} = -\left(1 + V^2\right) \rightarrow \frac{dV}{1+V^2} = -dx \xrightarrow{\int}$$

$$\tan^{-1}V = -x + c \rightarrow V = \tan(c - x) \rightarrow$$

$$y' = \tan(c - x) \rightarrow dy = -\tan(x - c)dx \xrightarrow{\int}$$

$$y = \ln\cos(x - c) + k \rightarrow \ln\cos(x - k) = y - k \rightarrow \cos(x - k) = e^{y-k} \rightarrow$$

$$\cos(x-k)=e^{-k}e^{y} \xrightarrow{\text{با فرض}} \begin{array}{l} e^{k}=\sqrt{c_1} \\ k=-c_2 \end{array}$$

$$e^{y}=\sqrt{c_1}\cos(x+c_2)$$

۴۲.گزینه ۲ درست است.

$$t=\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}=-t^2$$

طبق قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$y'=\frac{}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}(-t^2)$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right).\frac{dt}{dx}=\left(-2t\frac{dy}{dt}-t^2\frac{d^2y}{dt^2}\right)(-t^2)$$

با قرار دادن این عبارات در معادله دیفرانسیل داده شده داریم:

$$\frac{1}{t^4}\left(t^4\frac{d^2y}{dt^2}+2t^3\frac{dy}{dt}\right)+\frac{2}{t^3}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right)+y=\frac{1+\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2}+y=t+1$$

معادله فوق از نوع ضرایب ثابت غیرهمگن است که پایه‌های جواب معادله همگن $\cos t,\sin t$ بوده و جواب خصوصی معادله غیرهمگن $t+1$ است لذا گزینه دوم صحیح خواهد بود.

۴۳.گزینه ۲ درست است.

$$x^2y''+xy'+\left(2x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2k+1=1 \quad \rightarrow \quad k=0 \\ m^2=2 \quad \rightarrow \quad m=\sqrt{2} \\ 2r=2 \quad \rightarrow \quad r=1 \\ n^2=-\frac{1}{4} \end{array}\right\} \rightarrow \quad s=\sqrt{k^2-n^2}=\frac{1}{2}$$

لذا جواب عمومی چنین است.

$$y=x^{-k}\left(c_1J_{\frac{s}{r}}\left(\frac{mx^r}{r}\right)+c_2J_{-\frac{s}{r}}\left(\frac{mx^r}{r}\right)\right)$$

$$y=c_1J_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}\,x\right)+c_2J_{\frac{-1}{2}}\left(\sqrt{2}\,x\right)$$

$$=c_1\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{2}\,x}}\sin\left(\sqrt{2}\,x\right)+c_2\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{2}\,x}}\cos\left(\sqrt{2}\,x\right)$$

$$=c_1\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(\sqrt{2}\,x\right)+c_2\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(\sqrt{2}\,x\right)=k_1\frac{\cos\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x}}+k_2\frac{\sin\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x}}$$

۴۴ گزینه ۱ درست است

از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+Y(s)=3e^{-\pi s}$$

$$\left(s^2Y-6s\right)+Y=3e^{-\pi s} \quad \Rightarrow \quad \left(s^2+1\right)Y=6s+3e^{-\pi s}$$

$$Y(s)=\frac{6s}{s^2+1}+3\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad y(t)=6\cos t+3u_\pi(t)\sin(t-\pi)$$

$$\Rightarrow \quad y(t)=6\cos t-3u_\pi(t)\sin t$$

۴۵.گزینه ۳ درست است.

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \pi e^{-x}\cos\omega x dx$$

$$=\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos\omega x dx=\left(L(\cos\omega x)\right)\Big|_{s=1}=\frac{S}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=1}=\frac{1}{1+\omega^2}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\, dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \pi e^{-x}\sin\omega x\, dx$$

$$=\int_{0}^{\infty} e^{-x}\sin\omega x dx=\left(L(\sin\omega x)\right)\Big|_{s=1}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=1}=\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

پس انتگرال فوریه تابع چنین است.

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega$$

۴۶ گزینه ۳ درست است

از فرمول‌های اولیه تبدیل فوریه می‌دانیم

$$e^{-a|x|}\xrightarrow{F}\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$e^{-|x|}\xrightarrow{F}\frac{2}{1+\omega^2}$$

و لذا گزینه سوم صحیح است.

۴۷.گزینه ۳ درست است.

همدیس بودن تابع مختلط $W=f(z)$ در نقاطی که $f(z)$ تحلیلی نباشد و یا $f'(z)$ صفر شود به مخاطره می‌افتد.

از آن‌جا که $\sin z$ همه‌جا تحلیلی است، تبدیل $W=\sin z$ جایی همدیس نیست که

$$W'=0 \quad \rightarrow \quad \cos z=0 \quad \rightarrow \quad z=k\pi-\frac{\pi}{2}$$

که در آن k یک عدد صحیح می‌باشد (و نه الزماً طبیعی) و لذا گزینه سوم صحیح خواهد بود.

۴۸.گزینه ۱ درست است.

$$H(x,y)=h\left(u(x,y),v(x,y)\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=h_u u_x+h_v v_x$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}=h_u u_y+h_v v_y$$

$$|\nabla H|^2=\left|\frac{\partial H}{\partial x}i+\frac{\partial H}{\partial y}j\right|^2=\left(h_u u_x+h_v v_x\right)^2+\left(h_u u_y+h_v v_y\right)^2$$
$$=h_u^2u_x^2+h_v^2v_x^2+2h_u u_x h_v v_x+h_u^2u_y^2+h_v^2v_y^2+2h_u u_y h_v v_y$$

چون تابع مختلط $f(z)=u+iv$ تحلیلی فرض شده از معادلات کوشی ریمان داریم:

$$\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}\rightarrow\quad u_x v_x=-u_y v_y$$

پس

$$|\nabla H|^2=h_u^2\left(u_x^2+v_x^2\right)+h_v^2\left(v_x^2+u_x^2\right)=\left(u_x^2+v_x^2\right)\left(h_u^2+h_v^2\right)$$
$$=|f'(z)|^2|\nabla h|^2\quad\rightarrow\quad|\nabla H|=|\nabla h||f'(z)|$$

(بدون هیچ ربطی به همساز بودن تابع h)

۴۹.گزینه ۲ درست است.

طبق حل دالامبر معادله موج داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(g(x+at)+g(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}h(k)dk$$

چون هر دو شرط مرزی در $x=L$ و $x=0$ روی خود u داده شده باید توابع g و h را نسبت بـه $x=L$ گسـترش فـرد داد و سپس توابع حاصله را با دوره تناوب 2L توسیع متناوب داد.

$$u\left(x,t+\frac{2L}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(g(2L+x+at)+g(-2L+x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{-2L+x-at}^{2L+x+at}h(k)dk$$

به خاطر دوره تناوب 2L تابع g

$$g(2L+x+at)=g(x+at)$$
$$g(-2L+x-at)=g(x-at)$$

پس انتظار داریم:

$$u\left(x,t+\frac{2L}{a}\right)=u(x,t)$$

$$u\left(L-x,t+\frac{L}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(g(2L-x+at)+g(-x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{-x-at}^{2L-x+at}h(k)dk$$

به خاطر فرد بودن تابع y و دوره تناوب 2L آن

$$g(2L-x+at)=g(-x+at)=-g(x-at)$$
$$g(-x-at)=-g(x+at)$$

پس انتظار داریم

$$u\left(L-x,t+\frac{L}{a}\right)=-u(x,t)$$

۵۰ گزینه ۴ درست است

با قرار دادن $u(x,t)=F(x)G(t)$ در معادله داریم:

$$FG' - F''G = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{F''}{F} = \frac{G'}{G}$$

برای داشتن جواب‌های متناوب روی متغیر x بایستی $k = -\alpha^2 < 0$ لذا

$$F'' + \alpha^2 F = 0 \xrightarrow{\text{جواب عمومی}} F(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$$

شرط مرزی $u_x(0,t) - hu(0,t) = 0 \quad \rightarrow \quad A'(0) - hA(0) = 0$

شرط مرزی $u_x(L,t) - hu(L,t) = 0 \quad \rightarrow \quad A'(L) - hA(L) = 0$

شرط اول $\quad \rightarrow \quad \beta\alpha - hA = 0$

شرط دوم $\quad \rightarrow \quad -A\alpha\sin(\alpha L) + B\alpha\cos(\alpha L) + h\left(A\cos(\alpha L) + B\sin(\alpha L)\right) = 0$

شرط داشتن جواب غیربدیهی برای A و B از دستگاه فوق می‌طلبد.

دترمینان ضرایب $= 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} -h & \alpha \\ -\alpha\sin\alpha L + h\cos\alpha L & \alpha\cos\alpha L + h\sin\alpha L \end{vmatrix} = 0$

$$-\alpha h\cos\alpha L - h^2\sin\alpha L + \alpha^2\sin\alpha L - \alpha h\cos\alpha L = 0 \quad \rightarrow$$

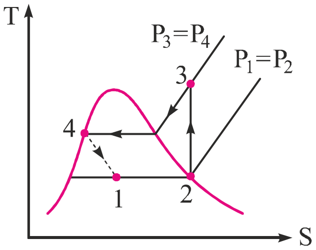
$$\left(\alpha^2 - h^2\right)\sin\alpha L = 2\alpha h\cos\alpha L \quad \rightarrow \quad \tan\alpha L = \frac{2\alpha h}{\alpha^2 - h^2}$$

پاسخ تشریحی توسط: مرتضی صفری فرد

۵۱. گزینه ۴ درست است

فرآیند 2 تا 3: کمپرسور

فرآیند 4 تا 1: شیر انبساطی



افزایش فشار در کمپرسور: $P_3 - P_2 = 1200\text{kPa}$

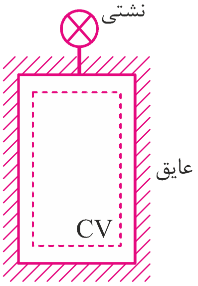
$$\mu_J = \left.\frac{\partial T}{\partial P}\right)_h \approx \frac{\Delta T}{\Delta P} = \frac{T_1 - T_4}{P_1 - P_4} = \frac{T_1 - T_4}{P_2 - P_3} = \frac{(-15-35)\,K}{(-1200)\,kPa} \quad \Rightarrow \quad \mu_J = 0.042\frac{K}{kPa}$$

لازم به ذکر است که در فرآیند اختناق فشار کاهش می‌یابد $(\Delta P < 0)$ و از آن‌جا که در این سوال دما نیز کاهش یافته است $(\Delta T < 0)$ ضریب ژول تامسون باید مثبت باشد، بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح نیستند.

۵۲. هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست

در این سوال برگشت ناپذیری بر واحد جرم خواسته شده است، اما آنچه واضح است این است که در این سوال جرم گاز داخل مخزن در حال تغییر است، بنابراین اولین سوالی که به ذهن خطور می‌کند این است که برگشت ناپذیری در واحد کدام جرم؟ جرم اولیه، جرم نهایی یا جرم خارج شده؟

رابطه برگشت‌ناپذیری برای فرایند USUF این سوال:



$$I = T_0\left[(S_2 - S_1) + \sum m_e S_e - \overset{0}{\cancel{\sum m_i S_i}}\right] - \overset{0}{\cancel{Q_{cv}}}\frac{T_0}{T_H}$$

$$I = T_0\left[(m_2 s_2 - m_1 s_1) + m_e s_e\right]$$

با استفاده از قانون بقای جرم می‌دانیم $m_e = m_1 - m_2$ است، پس:

$$I = T_0\left[m_2 s_2 - m_1 s_1 + (m_1 - m_2)s_e\right]$$

$$I = T_0\left[m_2(s_2 - s_e) - m_1(s_1 - s_e)\right]$$

$$I = T_0 m_2\left[C_p \ln\frac{T_2}{T_e} - R\ln\frac{P_2}{P_e}\right] - T_0 m_1\left[C_p \ln\frac{T_1}{T_e} - R\ln\frac{P_1}{P_e}\right]$$

در این سوال در ابتدای فرایند در خروجی مخزن شرایط خفگی وجود دارد و در خروجی عدد ماخ برابر با یک است. اما از آنجا که فشار داخل مخزن در حال کاهش است شرایط خفگی تا انتهای فرایند برقرار نیست و نمی‌توان به سادگی مساله را تحلیل کرد، زیرا مادامی که شرایط خفگی برقرار است فشار خروجی با فشار بحرانی برابر است $(P_e = P^*)$ و هنگامی‌که شرایط خفگی برقرار نیست فشار خروجی با فشار محیط برابر است $(P_e = 100\text{kPa})$.

در ضمن در این سوال گاز داخل مخزن امکان تبادل حرارت با محیط بیرون را ندارد و در اثر خروج جرم و کاهش فشار سرد می‌شود (مانند اسپری). بنابراین دمای گاز در این فرایند ثابت نمی‌ماند.

البته به نظر می‌رسد که آنچه مدنظر طراح این سوال بوده است استفاده از رابطه زیر می‌باشد:

$$I = T_0\Delta S_{net} = T_0\left[\Delta S_{sys} + \Delta S_{surr}\right]$$

که اساسا غلط است زیرا رابطه فوق برای سیستم است نه حجم کنترل. اما با این فرض غلط سوال را حل می‌کنیم تا به آن چه مدنظر طراح بوده برسیم:

$$I = T_0\left[\Delta S_{sys} + \Delta S_{surr}\right] = T_0\left[S_2 - S_1 + \frac{Q_{surr}}{T_0}\right] \Rightarrow I = T_0 m(s_2 - s_1) \Rightarrow i = T_0(s_2 - s_1)$$

مجدداً متذکر می‌شویم که فرمول اخیر مربوط به سیستم است نه حجم کنترل.

$$i = T_0\left(c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{P_2}{P_1}\right)$$

آنچه ظاهراً از این جا به بعد مدنظر طراح بوده است این است که چون فرایند تدریجی است، دما ثابت می‌ماند در صورتی که در تحلیل صحیح سوال دیدیم اینگونه نیست، اما اگر به غلط فرض کنیم $T_1 = T_2$، آنگاه:

$$i = -T_0 R\ln\frac{P_2}{P_1} = -298\times 0.0287\ln\frac{1}{10} \Rightarrow i = 197\frac{kJ}{kg}$$

اما واضح است که جواب فوق به هیچ وجه توجیه علمی ندارد و اساساً غلط است.

۵۳. گزینه ۲ درست است

$$\left.\begin{array}{ll}\text{روابط ماکسول:} & \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \\ \text{معادله حالت گاز کامل:} & Pv = RT\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v} = \rho R$$

۵۴.گزینه ۳ درست است

$$\dot{W}_{1-2}^{rev} = \sum \dot{m}_i\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum \dot{m}_e\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) - T_0\left[\sum \dot{m}_i s_i - \sum \dot{m}_e s_e\right] + \dot{Q}_{cv}\left(1 - \frac{T_0}{T_H}\right)$$

با صرف‌نظر از اثرات انرژی جنبشی و پتانسیل و با فرض آدیاباتیک بودن توربین داریم:

$$\dot{W}_{1-2}^{rev} = \dot{m}(h_i - h_e) - T_0(S_i - S_e) \quad \Rightarrow$$

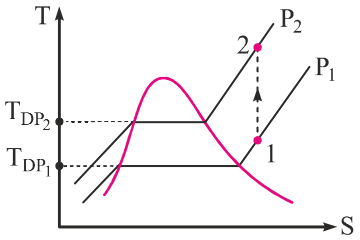
$$w^{rev} = \frac{\dot{W}^{rev}}{\dot{m}} = (h_i - he) - T_0(s_i - s_e) = (h_1 - h_2) - T_0(s_1 - s_2)$$

۵۵.گزینه ۳ درست است

با فرض ایزنتروپیک بودن فرآیند از نقطه ۱ به ۲ می‌رسیم. در شکل زیر P_1 و P_2 فشار جزئی بخار آب داخل کمپرسور است. با توجه به رابطه زیر با افزایش فشار کل مخلوط فشار جزئی بخار نیز افزایش می‌یابد:

$$P_{vapor} = yP_{total}$$

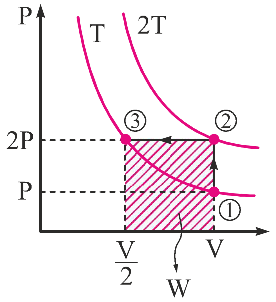
که در این رابطه y کسر مولی بخار است.



لازم به ذکر است که اگر فرایند آیزنتروپیک نباشد و برگشت ناپذیری داشته باشیم (انتروپی افزایش یابد) آنگاه نقطه ۲ بر روی خط P_2 کمی بالاتر می‌رود و نتیجه نهایی عوض نمی‌شود (با فرض آدیاباتیک بودن کمپرسور)

۵۶.گزینه ۲ درست است

فرآیند اول:



$$\left.\begin{array}{l} \frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \\ V_1 = V_2, T_2 = 2T_1 \end{array}\right\} \Rightarrow P_2 = 2P_1$$

فرآیند دوم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{P_2V_2}{T_2} = \frac{P_3V_3}{T_3} \\ P_2 = P_3 \quad , \quad T_3 = \frac{1}{2}T_2 \end{array}\right\} \Rightarrow V_3 = \frac{V_2}{2}$$

$W = \int PdV = $ مساحت زیر منحنی فرآیند 1 تا 3 $= 2P \times \frac{V}{2} = PV$

۵۷ گزینه ۱ درست است

قانون دوم برای حجم کنترل در شرایط پایا:

$$\cancelto{0}{\frac{dS}{dt}}\bigg)_{c\forall} + \dot{m}(s_e - s_i) = \sum \cancelto{0}{\frac{\dot{Q}}{T}} + \dot{S}_g \quad \Rightarrow \quad s_e - s_i = \frac{\dot{S}_g}{\dot{m}} \quad \Rightarrow \quad \Delta s = s_g \geq 0$$

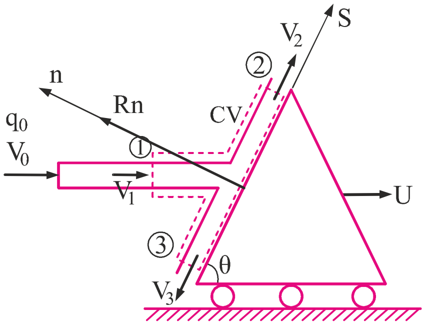
بنابراین Δs باید بزرگتر مساوی صفر شود. در ابتدا فرض می‌کنیم جریان از M به N باشد. تحت این شرایط باید $\Delta S_{M-N} \ge 0$ شود:

$$\Delta S_{M-N} = C_p \ln\frac{T_N}{T_M} - R\ln\frac{P_N}{P_M} = 1.5\left(\ln\frac{320}{360}\right) - 0.3\left(\ln\frac{115}{120}\right) =$$

$$-1.5\ln\frac{310}{320} + 0.3\ln\frac{120}{115} = -1.5\ln\frac{9}{8} + 0.3\ln\frac{24}{23} = -1.5(0.12) + 0.3(0.04) < 0$$

بنابراین $\Delta S_{M-N} < 0$ شد که با فرض اولیه تناقض دارد بنابراین جریان از N به M می‌باشد.

۵۸. گزینه ۱ درست است



با استفاده از معادله برنولی بین نقاط 1 و 2 به راحتی می‌توان نشان داد که $V_1 = V_2$ است زیرا در گذر از 1 به 2 نه ارتفاع (z) عوض می‌شود (با فرض کوچک بودن حجم کنترل) و نه فشار.

$$\frac{\cancel{P_1}}{\cancel{\gamma}} + \frac{V_1^2}{2g} + \cancel{z_1} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\cancel{V_2^2}}{\cancel{2g}} + \cancel{z_z} \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_2$$

به همین ترتیب می‌توان گفت $V_1 = V_3$ و در مجموع می‌توان گفت $V_1 = V_2 = V_3$. معادله اندازه حرکت خطی در جهت n:

$$\sum F_n = \sum \overset{0}{\cancel{(\dot{m}V_n)_{out}}} - \sum (\dot{m}V_n)_{in}$$

$$R_n = -\dot{m}(-V_1 \sin\theta) \quad \rightarrow \quad R_n = \dot{m}V_1\sin\theta = \rho A V_1^2 \sin\theta$$

و از آن‌جا که حجم کنترل متحرک است از سرعت نسبی استفاده می‌کنیم:

$$R_n = \rho A (V_0 - U)^2 \sin\theta$$

با صرف‌نظر کردن از وزن آب و اصطکاک می‌توان گفت $R_s = 0$ می‌باشد (در جهت S نیرویی به حجم کنترل وارد نمی‌شود) پس کل نیروی وارد بر حجم کنترل که همان نیروی وارد بر جسم است برابر است با:

$$R = \sqrt{R_n^2 + \cancel{R_s^2}} = R_n = \rho A (V_0 - U)^2 \sin\theta$$

توان منتقل شده به جسم برابر است با:

$$P = R \times U \quad \Rightarrow \quad P = \rho A (V_0 - U)^2 U \sin\theta$$

$$\frac{dP}{dU} = 0 \quad \Rightarrow \quad U = \frac{V_0}{3}$$

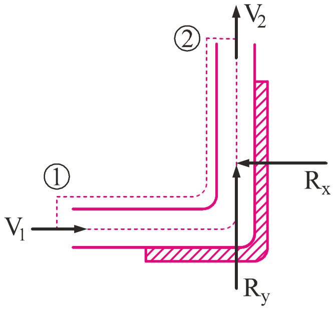
۵۹.گزینه ۳ درست است

$$F_B = W \quad \Rightarrow \quad \gamma_1\forall_1 + \gamma_2\forall_2 = \gamma\forall \quad \Rightarrow \quad \rho_1\frac{\forall}{2} + \rho_2\frac{\forall}{2} = \rho\forall \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$$

۶۰. گزینه ۴ درست است

$$\sum F_x = \sum \cancel{(\dot{m}V_x)}^{0}_{out} - \sum (\dot{m}V_x)_{in}$$

$$-R_x = -\dot{m}V_1 \quad \Rightarrow \quad R_x = \rho A V_1^2$$



و از آن‌جا که حجم کنترل متحرک است از سرعت نسبی استفاده می‌کنیم:

$$R_x = \rho_j A_j \left(V_j - V\right)^2$$

۶۱. گزینه ۲ درست است

$$Q = f\left(R, \mu, \frac{dP}{dx}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} n = 4 \\ m = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{تعداد گروه‌های بدون بعد} = n - m = 1$$

بنابراین گزینه‌های ۳ و ۴ صحیح نیستند و بین گزینه های ۱ و ۲ واضح است کـه گزینـه ۲ انتخـاب مـی‌شـود، زیـرا در گزینـه ۲ متغیرهای مطرح شده در صورت سوال وجود دارد.

بررسی بدون بعد بودن گزینه ۲: بعد فشار با بعد ρV^2، بعد x با بعد L، بعد Q با بعد L^2V (زیرا $Q = AV$) و بعد R با بعـد L یکسان است. پس گزینه ۲ به صورت زیر در می‌آید.

$$\frac{Q\mu}{R^4\left(\frac{dP}{dx}\right)} = \frac{\left(L^2V\right)\mu}{L^4 \times \frac{\rho V^2}{L}} = \frac{\mu}{\rho VL}$$

که معکوس عدد رینولدز و بی‌بعد است.

لازم به ذکر است که با استفاده از رابطه پوآزی که مختص جریان آرام است نیز می‌توان گزینه ۲ را انتخاب کرد، زیرا:

$$\Delta P = \frac{128\mu LQ}{\pi B^4} \Rightarrow \frac{\Delta P}{L} = \frac{128\mu Q}{\pi D^4} \Rightarrow \frac{Q\mu}{D^4\left(\frac{\Delta P}{L}\right)} = \frac{\pi}{128} = \text{بدون بعد}$$

۶۲. گزینه ۳ درست است

$$\text{گشتاور لازم برای دوران محور}: T = \frac{2\pi\mu L\Omega}{h} R^3$$

$$\text{توان لازم برای دوران محور}: P = T \times \Omega = \frac{2\pi\mu L\Omega^2}{h} R^3$$

بنابراین برای دو برابر شدن Ω، توان (P) باید چهار برابر شود.

۶۳. گزینه ۲ درست است

از ابتدای مسیر b تا وسط مسیر b به علت نیروی جانب مرکز، فشـار افـزایش مـی‌یابـد (گرادیـان فشـار معکـوس اسـت یعنـی $\frac{dP}{dx} > 0$)

هم‌چنین از وسط مسیر e تا انتهای آن، فشار افزایش می‌یابد. البته اگر شروع مسیر خمیده روی سطح خارجی را از a درنظر بگیریم و همچنین انتهای مسیر خمیده روی سطح پایینی را f درنظر بگیریم، گزینه ۴ صحیح است.
منبع: کتاب مکانیک سیالات Bernard Massey، صفحه ۲۶۶

۶۴. گزینه ۳ درست است

بررسی گزینه ۱: از آنجا که در نقطه ماکزیمم نمودار $\frac{dT}{dx}=0$ است و در نقاط دیگر کناری آن $\frac{dT}{dx}$ مقداری مخالف صفر دارد پس شار حرارتی $q''_x=-k\frac{dT}{dx}$ ثابت نیست (گزینه ۱ صحیح نیست)
بررسی گزینه ۲: بحث متغیر بودن k با دما معمولاً زمانی مطرح می‌شود که شار یا انتقال حرارت در دیواره ثابت باشد تا به عنوان مثال بتوان گفت که به علت ثابت بودن شار، k و $\frac{dT}{dx}$ رفتاری معکوس دارند. (این گزینه نیز صحیح نیست)
بررسی گزینه ۳: با فرض شرایط پایا و ثابت بودن k و یک بعدی بودن انتقال حرارت داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{\dot{q}}{k}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2T}{dx^2}=-\frac{\dot{q}}{k}\\ \text{تقعر منحنی دما رو به پایین است}: \frac{d^2T}{dx^2}<0\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \dot{q}>0$$

یعنی دیواره دارای منبع تولید حرارت می‌باشد و از آنجا که در سمت راست دیواره $\frac{dT}{dx}=0$ است، پس قسمت راست دیواره عایق است. بنابراین گزینه ۳ صحیح است.
بررسی گزینه ۴: با حرکت در جهت x شار ابتدا کاهش می‌یابد، سپس صفر می‌شود و سپس افزایش و مجدداً کاهش می‌یابد. بنابراین این گزینه نیز صحیح نیست.

۶۵. گزینه ۱ درست است

$$Bi=\frac{hL}{k}$$

اگر طول نصف شود، Bi نصف می‌شود.

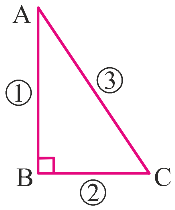
$$\tau=\frac{PC\forall}{hA}=\frac{PC}{h}\ \frac{\forall}{A}\ \xrightarrow{\frac{\forall}{A}=L}\ \frac{PC}{h}L$$

طبق رابطه اخیر با نصف شدن طول، τ نصف می‌شود و در نتیجه زمان رسیدن جسم به دمای مشخص نیز نصف می‌شود.
لازم به ذکر است که هر چقدر ثابت زمانی کوچک شود، زمان رسیدن دمای جسم به یک دمای مشخص، کم‌تر می‌شود. از آنجا که در این سؤال τ کم شده است پس گزینه‌های ۲ و ۳ صحیح نیستند.

۶۶. گزینه ۳ درست است

$$T_{max}-T_s=\frac{\dot{q}R^2}{4k}=\frac{4\times10^7\times\left(0.5\times10^{-2}\right)^2}{4\times25}=10^\circ C$$

۶۷.گزینه ۴ درست است



$$\left.\begin{array}{ll} \text{تقارن} & : F_{31}=F_{32} \\ & F_{33}=0 \\ \text{قاعده مجموع} & : F_{33}+F_{31}+F_{32}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow F_{31}=F_{32}=\frac{1}{2}$$

قاعده تقابل:

$$A_1F_{13}=A_3F_{31} \quad \Rightarrow \quad F_{13}=\frac{A_3}{A_1}F_{31}=\frac{3\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶۸.گزینه ۱ درست است

$$h_x \propto x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad h_x=C_1x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad Nu_x=\frac{h_x.x}{k}=\frac{C_1}{k}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{h}=\frac{1}{L}\int_0^L h_xdx=\frac{1}{L}\int_0^L C_1x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{2C_1}{L}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)_0^L$$

$$\Rightarrow \quad \bar{h}=2C_1L^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \overline{Nu}=\frac{\bar{h}L}{k}=\frac{2C_1}{k}L^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\overline{Nu_L}}{Nu_{x=L}}=\frac{\frac{2C_1}{k}L^{\frac{1}{2}}}{\frac{C_1}{k}L^{\frac{1}{2}}}=2$$

لازم به ذکر است که نسبت $\frac{\overline{Nu_L}}{Nu_L}$ نسبت دو عدد بدون بُعد است که حاصل، یک عدد بدون بُعد است. پس گزینه‌های ۳ و ۴ صحیح نیستند.

۶۹.گزینه ۲ درست است

۷۰. گزینه ۲ درست است

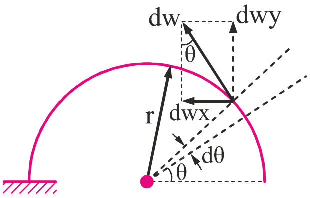
بررسی گزینه ۱: به علت رسم کردن مقاومت سطحی برای سطح 1 (یعنی $\frac{1-\varepsilon_1}{A_1\varepsilon_1}$) غلط است.

بررسی گزینه ۳: از آنجا که سطح 2 عایق است، انتقال حرارتی ندارد.پس $E_{b_2}=J_2$ است و نیازی به مقاومت سطحی برای سطح 2 نیست. بنابراین این گزینه نیز غلط است.

بررسی گزینه ۴: با توجه به توضیحات گزینه ۱ و گزینه ۳، این گزینه نیز غلط است.

۷۱ گزینه ۱ درست است

در المانی از بار گسترده w_0 داریم:

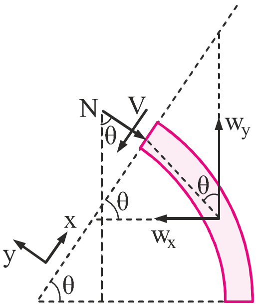


$$dW = w_0\ rd\theta$$

$$dW_x = dW\sin\theta = w_0 r\sin\theta d\theta \xrightarrow{\int_0^\theta} W_x = w_0 r(1-\cos\theta) \qquad (I)$$

$$dW_y = dW\cos\theta = w_0 r\cos\theta d\theta \xrightarrow{\int_0^\theta} W_y = w_0 r\sin\theta \qquad (II)$$

حال در قطاعی از تیر داریم:



$$\sum F_x = 0 \quad \to \quad V = W_y\sin\theta - W_x\cos\theta$$

$$\xrightarrow{I,II} \quad V = (w_0 r\sin\theta)\sin\theta - [w_0 r(1-\cos\theta)]\cos\theta = w_0 r(1-\cos\theta)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \to \quad N = W_y\cos\theta + W_x\sin\theta$$

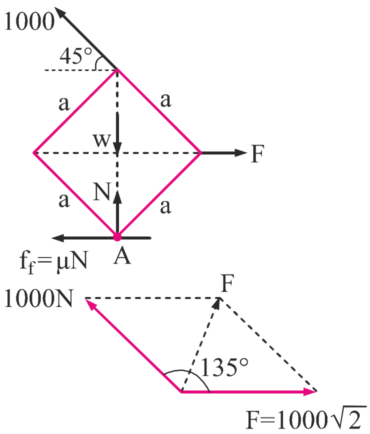
$$\xrightarrow{I,II} \quad N = (w_0 r\sin\theta)\cos\theta + [w_0 r(1-\cos\theta)]\sin\theta = w_0 r\sin\theta$$

طبق خواسته مسئله داریم:

$$\frac{N}{V} = \frac{w_0 r\sin\theta}{w_0 r(1-\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

.۷۲گزینه ۱ درست است

چون وضعیت w و به تبع آن نیروی N نیروی اصطکاک f_f در لبه درگیر مشخص نیست، باید نیروی F را از معادله گشتاوری به دست آوریم. یعنی:



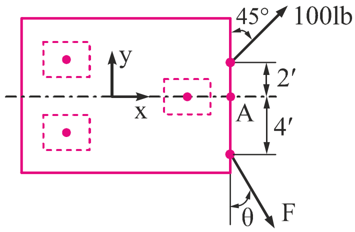
$$\sum M_A=0 \;\rightarrow\; -F\times\frac{a\sqrt{2}}{2}+1000\cos 45\times a\sqrt{2} \;\rightarrow\; F=1000\sqrt{2}\ \text{N}$$

حال برآیند نیروی $F=1000\sqrt{2}$ و نیروی $1000\ \text{N}$ عبارت است از:

$$F'=\sqrt{\left(1000\sqrt{2}\right)^2+(1000)^2+2\left(1000\sqrt{2}\right)(1000)\cos 135}=1000$$

۷۳. گزینه ۴ درست است

در صورت سؤال مهم است که معادله $\sum F_y=0$ و $\sum M_A=0$ در مورد گزینه‌ها ارضاء شود که داریم:



گزینه ۱ : $\sum F_y=0 \quad , \quad \sum M_A\neq 0$

گزینه ۲ : $\sum F_y\neq 0 \quad , \quad \sum M_A\neq 0$

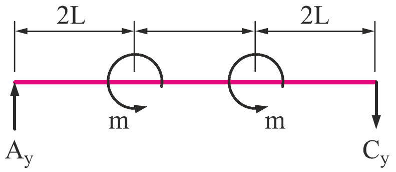
گزینه ۳ : $\sum F_y\neq 0 \quad , \quad \sum M_A\neq 0$

گزینه ۴ : $\sum F_y=0 \quad , \quad \sum M_A=0$

که چون در گزینه چهارم اعداد غیر روند وجود دارد و ماشین حساب مجاز نیست، می‌توان از نادرست بودن سایر گزینه‌ها به درست بودن گزینه ۴ پی برد!

۷۴.گزینه ۴ درست است

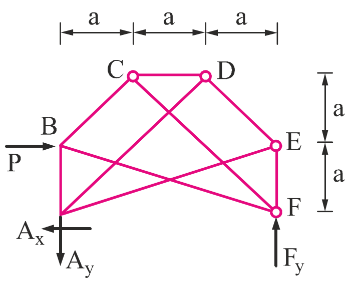
چون تیر از لحاظ بارگذاری پادمتقارن است، بنابراین می‌توان تکیه‌گاه وسط (B) را حذف کرد و نوشت:



$$\sum M_C=0 \;\rightarrow\; A_y\times 6L=m+m \;\rightarrow\; A_y=\frac{m}{3L}$$

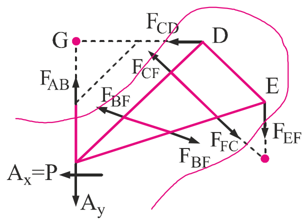
۷۵ گزینه ۳ درست است

ابتدا عکس‌العمل A_x را به دست می‌آوریم:



$$\sum F_x=0 \;\rightarrow\; A_x=P$$

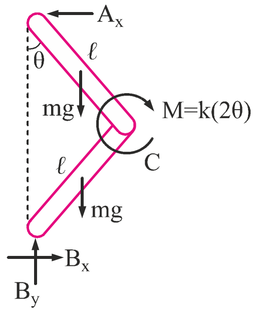
در مقطع زیر داریم:



$$\sum M_G = 0 \qquad -P\times 2a - F_{EF}\times 3a = 0 \ \rightarrow\ F_{EF} = \frac{-2}{3}P$$

۷۶ گزینه ۲ درست است

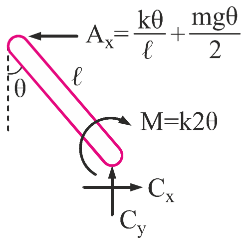
اگر سیستم از پایداری خارج شود $(\theta << 1)$، داریم:



$$\sum M_B = 0 \ \rightarrow\ -k2\theta - 2mg\frac{\ell}{2}\sin\theta + A_x 2\ell\cos\theta = 0$$

$$\xrightarrow[\cos\theta\approx 1]{\sin\theta\approx\theta}\ A_x = \frac{k\theta}{\ell} + \frac{mg\theta}{2}$$

در عضو AC داریم:

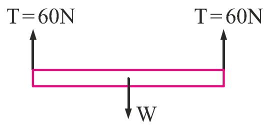


$$\sum M_C = 0 \ \rightarrow\ k2\theta = \left(\frac{k\theta}{\ell} + \frac{mg\theta}{2}\right)\ell\cos\theta$$

$$\xrightarrow[\theta=0]{\text{برای حالت پایداری}}\ k_{min} = \frac{mg\ell}{2} \ \rightarrow\ k > \frac{1}{2}mg\ell$$

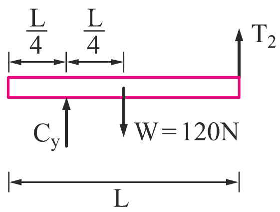
۷۷. گزینه ۲ درست است

در حالت اول داریم:



$$\sum F_y = 0 \ \rightarrow\ W = 120\ \text{N}$$

در حالت دوم داریم:



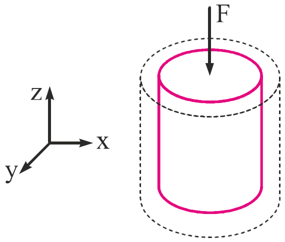
$$\sum M_C = 0 \ \rightarrow\ T_2 \times \frac{3L}{4} = 120\,\frac{L}{4} \ \rightarrow\ T_2 = 40\ \text{N}$$

۷۸. گزینه ۱ درست است

$$\frac{P_{crs}}{P_{crc}} = \frac{\left.\frac{\pi^2 EI}{\ell_e^2}\right|_s}{\left.\frac{\pi^2 EI}{\ell_e^2}\right|_c} = \frac{I_s}{I_c} = \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{\pi a^4}{4}} = \frac{1}{3\pi}$$

۷۹ گزینه ۲ درست است

استوانه لاستیکی از طرف x و y دارای تعاون است پس:



$$\sigma_x = \sigma_y$$

هم‌چنین دو راستای x و y مقید است پس:

$$\varepsilon_x = 0 \rightarrow \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right) = 0 \xrightarrow[\sigma_x=\sigma_y]{\sigma_z=\frac{F}{A}} \sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu}\frac{F}{A} \qquad (\mathrm{I})$$

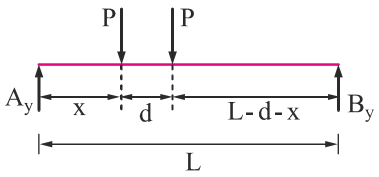
حال کرنش در راستای z عبارت است از:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right) \xrightarrow{(\mathrm{I})} \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\frac{F}{A} - \frac{\nu^2}{1-\nu}\frac{zF}{A}\right) = \frac{F}{AE}\left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right)$$

$$\rightarrow \Delta L_z = \varepsilon_z L \rightarrow \Delta L_z = \frac{FL}{AE}\left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\right) = \frac{\sigma L}{AE}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}$$

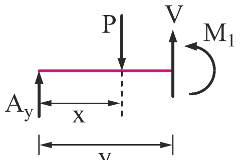
۸۰ گزینه ۳ درست است

نیروی تکیه‌گاهی A عبارت است از (x پارامتر متغیر است):

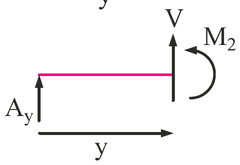


$$\sum M_B = 0 \rightarrow A_y = \frac{P}{L}(2L - 2\ \ x - d)$$

در دو حالت ممکن است ممان خمشی ماکزیمم اتفاق افتد که داریم:



$$\rightarrow M_1 A_y \times y - P(y - x)$$



$$\rightarrow M_2 = A_y \times y$$

$$\rightarrow M_2 > M_1$$

بنابراین در مقطع دوم حتماً ممان خمشی ماکزیمم است و داریم:

$$M_2 = A_y \times y \xrightarrow[\text{بیش‌ترین مقدار } y]{y=x} M_2 = \frac{P}{L}(2L - 2\ \ x - d)x$$

$$\rightarrow \frac{\partial M_2}{\partial x} = 0 \rightarrow x^* = \frac{2L-d}{4} \rightarrow M_{2\max}\Big|_{x} = \frac{P}{L}\left(2L - 2\left(\frac{2L-d}{4}\right) - d\right)\left(\frac{2L-d}{4}\right)$$

$$\rightarrow M_{2\max}\Big|_{x^*} = \frac{PL}{2}\left(1 - \frac{d}{2L}\right)^2 \rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M_{2\max}}{S} = \frac{PL}{S}\frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{2L}\right)^2$$

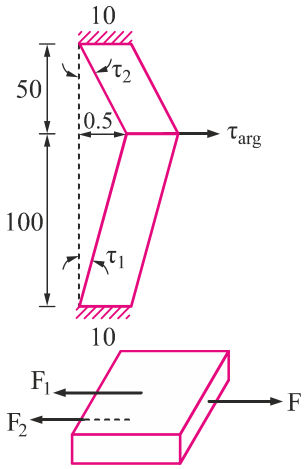
۸۱. گزینه ۴ درست است

$$y_A = \frac{PL_{BC}^3}{3EI} + \frac{PL_{AB}^3}{3E\Sigma} + \frac{(PL_{AB})L_{BC}}{GJ} L_{AB}$$

که مشاهده می‌شود با دو برابر شدن L_{AB} و L_{BC}، خیز عمودی نقطه A، 8 برابر می‌شود.

۸۲ گزینه ۱ درست است

در لاستیک‌های موجود در شکل داریم:



$$\gamma_1 \simeq +g\gamma_1 = \frac{0.5}{50} = 0.01$$

$$\tau_1 = G\gamma_1 \quad \rightarrow \quad \tau_1 = 1\times 0.01 = 0.01 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \quad F_1 = \tau_1 A = 0.01\times 100 \quad \rightarrow \quad F_1 = 1 \text{ N}$$

$$\gamma_2 = +g\gamma_2 = \frac{0.5}{100} = 0.005$$

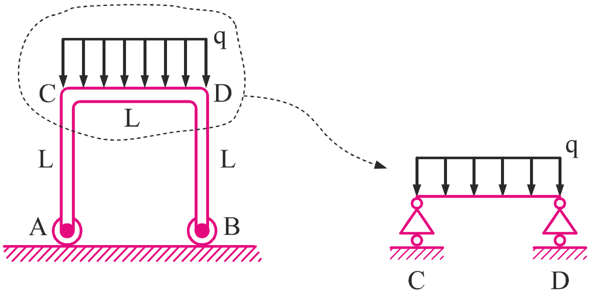
$$\tau_2 = G\gamma_2 \quad \rightarrow \quad \tau_2 = 1\times 0.05 = 0.05 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \quad F_2 = \tau_2 A = 0.005\times 100 \quad \rightarrow \quad F_2 = 0.5$$

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad F = F_1 + F_2 = 1 + 0.5 = 1.5 \text{ N}$$

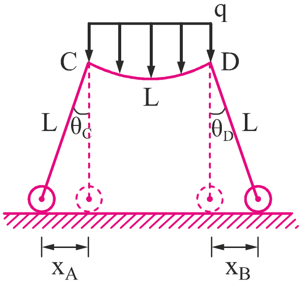
۸۳. گزینه ۱ درست است

شیب در نقاط C و D را باید پیدا کنیم، بنابراین قسمتی که بار گسترده بر آن اعمال می‌شود را می‌توان با تیر با دو انتهای ساده مدل کرد و نوشت:



$$\theta_C = \theta_D = \frac{qL^3}{24\,EI}$$

حال به دلیل این‌که در قسمت BD و AC ممان خمشی وجود ندارد، می‌توان آن‌ها را به صورت خط صاف در نظر گرفت و نوشت:



$$\Delta L_{AB} = x_A + x_B = \theta_C \times L + \theta_D \times L = \frac{qL^3}{24\,EI}\times L + \frac{qL^3}{24\,EI}\times L$$

$$\Delta_{AB} = \frac{1}{12}\frac{qL^4}{EI}$$

۸۴.گزینه ۳ درست است

به هر حال، به کمک تئوری کاسیگلیانو خیز ناشی از انرژی خمشی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{y_{\max A}}{y_{\max B}}=\frac{\int \frac{M_x}{EI_A}\frac{\partial M_x}{\partial P}dx}{\int \frac{M_x}{EI_B}\frac{\partial M_x}{\partial P}dx}=\frac{\frac{1}{\cancel{E}I_A}\cancel{\int M_x\frac{\partial M_x}{\partial P}dx}}{\frac{1}{\cancel{E}I_B}\cancel{\int M_x\frac{\partial M_x}{\partial P}dx}}=\frac{I_B}{I_A}=\frac{\frac{a\left(\frac{2a}{3}\right)^3}{12}}{\frac{\frac{2a}{3}(a)^3}{12}}=\frac{4}{9}$$

۸۵. گزینه ۳ درست است

طبق رابطه ضریب اصطکاک مربوط به مدل پتروف مشاهده می‌شود که با نصف شدن بار شعاعی (W)، ضریب اصطکاک (f) دو برابر می‌شود.

$$f=2\pi^2\frac{\mu N}{P}\frac{r}{C}\quad,\quad P=\frac{W}{2r\ell}$$

لازم به ذکر است که تئوری پتروف با فرض یاتاقان هم‌مرکز معرفی شده که البته برای یاتاقان غیر هم‌محور نیز مناسب ارزیابی می‌شود.

۸۶.گزینه ۲ درست است

$$i=\frac{W_P}{W_g}=\frac{1750}{350}=5\ \rightarrow\ i=\frac{N_g}{N_P}=5\ \rightarrow\ N_g=5N_P\xrightarrow{N_{min}=N_P=15}N_g=75$$

حال فاصله بین مراکز در کم‌ترین مقدار (چون از استفاده کردیم) عبارت است از:

$$d'_{min}=\frac{d_p+d_g}{2}=\frac{m\left(N_g+N_p\right)}{2}=m\frac{(75+15)}{2}=45\text{ m}$$

حال فاصله d'_{min} به اینچ عبارت است از:

$$d'_{min(in)}=\frac{45}{25.4}\text{ m}$$

چون به مدول m دسترسی نداریم نمی‌توان فاصله d'_{min} را یافت. البته اگر مدول‌های استاندارد (0.5، 0.8، 1، 1.25، 1.5، 2، 2.5، 3، 4، 5، 6، 8، 10، 12، 16، 20، 25، 32، 40 و 50 در واحد میلی‌متر) را در نظر بگیریم، بهترین گزینه، گزینه ۲ می‌باشد.

۸۷ گزینه ۲ درست است

در جوش ماهیچه‌ای شکل سؤال تنش برشی ماکزیمم عبارت است از:

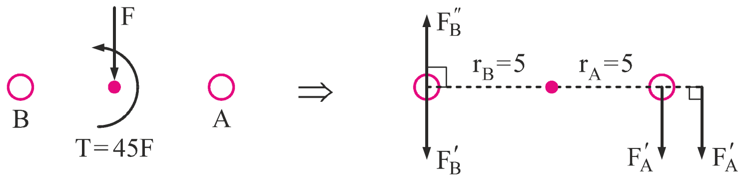
$$\tau_{max}=\frac{2F}{A}=\frac{2F}{2+\ell}=\frac{2F}{2\frac{\sqrt{2}}{2}wL}=\frac{\sqrt{2}F}{wL}$$

ضریب اطمینان واماندگی استاتیکی را محاسبه می‌کنیم:

$$n_s=\frac{S_{sy}}{\tau_{max}}=\frac{\tau_{all}}{\tau_{max}}=\frac{\tau_{all}}{\frac{\sqrt{2}F}{wL}}=\frac{\tau_{all}\,wL}{\sqrt{2}F}\xrightarrow[\text{مرز واماندگی}]{n_s=1}F=\frac{1}{\sqrt{2}}\tau_{all}wL$$

۸۸. گزینه ۱ درست است

لازم به ذکر است که پیچ A حتما بحرانی تر از پیچ B است و بنابراین فقط گزینه ۱ می‌تواند درست باشد. برای حل، با انتقال نیروی F به مرکز سطح پرچها و اختصاص سهم هر پرچ از نیرو گشتاور موجود داریم:



$$F'_A = F'_B = \frac{F}{N} = \frac{F}{2} = 0.5\ F$$

$$F''_A = F''_B = \frac{T}{NR} = \frac{45\ F}{2\times 5} = 4.5\ F$$

$$F_A = F'_A + F''_A = 0.5F + 4.5F = 5F \ \rightarrow\ \tau_A = \frac{F_A}{A} = \frac{5F}{A} \ \rightarrow\ n_{SA} = \frac{S_{sy}}{\tau_A} = \frac{S_{sy}}{\frac{5F}{A}} = \frac{AS_{sy}}{5F}$$

$F_B = F'_B - F''_B = -4\ F \ \rightarrow$ علامت منفی صرفاً نشان دهنده جهت است $\rightarrow\ \tau_B = \dfrac{F_B}{A} = \dfrac{4F}{A} \ \rightarrow$

$$n_{SB} = \frac{S_{sy}}{\tau_B} = \frac{S_{sy}}{\frac{4F}{A}} = \frac{AS_{sy}}{4F}$$

$$\frac{n_{S_A}}{n_{S_B}} = \frac{\frac{AS_{sy}}{5F}}{\frac{AS_{sy}}{4F}} = \frac{4}{5} \simeq \frac{9}{11}$$

۸۹ گزینه ۲ درست است

رابطه سختی فنر عبارت است از:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \left(\frac{Gd^4}{8D^3Na}\right)_1 = \frac{G_1d_1^4}{8(20)^3 10} \\ k_2 &= \left(\frac{Gd^4}{8D^3Na}\right)_2 = \frac{G_2d_2^4}{8(40)^3\times 5} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[d_1=d_2=d]{G_1=G_2=G} \frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{Gd^4}{8(20)^3 10}}{\frac{Gd^4}{8(40)^3\times 5}} = \frac{40^3\times 5}{20^3\times 10} = 4$$

۹۰. گزینه ۲ درست است

طبق تعریف ارائه شده به صورت سؤال، منظور از ضریب اطمینان (ضریب بار) نسبت $S = \dfrac{C}{F_e}$ می‌باشد که در حالت رینگ داخلی چرخان $(V_A = 1)$ داریم:

$$S_1 = \frac{C}{F_{e1}} = \frac{C}{XV_AF_r + YF_a} \xrightarrow[F_a=0]{V_A=1} S_1 = \frac{C}{XF_r} \qquad (I)$$

در حالت رینگ خارجی چرخان $(V_B = 1.2)$ داریم:

$$S_2 = \frac{C}{F_{e2}} = \frac{C}{XV_BF_r + YF_a} \xrightarrow[F_a=0]{V_B=1.2} S_2 = \frac{C}{1.2\times F_r} \approx 0.83\frac{C}{XF_r} \xrightarrow{(I)} S_2 = 0.83\ S_1$$

هنگامی که بلبرینگ در بارگذاری متغیر قرار می‌گیرد، بار شعاعی معادل $\left(F_{eq}\right)$ عبارت است از:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
	بخش زمانی	سرعت دورانی	سرعت دورانی × بخش زمانی $(1)\times(2)$	بخش دورانی $\frac{(3)}{\sum(3)}$ (f_i)	نیروی شعاعی (F_{ri})	نیروی محوری (F_{ai})	نیروی معادل (F_{ex})	ضریب کاربرد (a_{fi})	$a_{fi}F_{ei}$ $(7)\times(\sigma)$
رینگ داخلی چرخان	0.5	N	0.5 N	0.5	F_r	0	XF_r	1	XF_r
رینگ خارجی چرخان	0.5	N	0.5 N	0.5	F_r	0	$1.2XF_r$	1	$1.2xF_r$
مجموع	1		N	1					

$$F_{eq}=\left[\sum f_i\left(a_{fi}f_{ei}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}\xrightarrow[\text{بلبرینگ}]{n=3}F_{eq}=\left[0.5\left(XF_r\right)^3+0.5\left(1.2XF_r\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}\rightarrow F_{eq}\simeq 1.1XF_r$$

حال ضریب اطمینان (ضریب بار) در حالت اول و دوم عبارت است از:

رینگ داخلی چرخان : $S_1=\frac{C}{F_{e1}}=\frac{C}{XV_AF_r+YF_a}\xrightarrow[F_a=0]{V_A=1}S_1=\frac{C}{XF_r}\qquad(I)$

رینگ داخلی چرخان و پس از $\frac{L}{2}$، رینگ خارجی چرخان : $S_1=\frac{C}{F_{e2}}=\frac{C}{1.1XF_r}\simeq 0.9\frac{C}{XF_r}\xrightarrow{(I)}S_2=0.9S_1$

۹۱. گزینه ۴ درست است.

$m_A = m_B = m$

انرژی کل (جنبشی + پتانسیل) به علت پایستگی انرژی در حالت $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 90^\circ$ با یکدیگر برابر است بنابراین

$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 + T_1 = V_2 + T_2$$

اگر سطح انرژی پتانسیل را در حالت $\theta = 90$ هم ارتفاع با جرم A در نظر بگیریم داریم:

$$V_1 = m_A g\ell + m_B g\ell \quad , \quad T_1 = 0 + 0$$

و

$$V_2 = 0 + m_B g\ell \quad , \quad T_2 = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2$$

$$\Rightarrow \quad m_A g\ell = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2 \quad \Rightarrow \quad mg\ell = \frac{1}{2}(m)\left(V_A^2 + V_B^2\right) \quad (\mathrm{I})$$

با توجه به این که در راستای افقی نیروی خارجی به سیستم اعمال نمی‌گردد بنابراین مرکز جرم در راستای افقی حرکت نمی‌کند و به تبع آن سرعت آن نیز صفر است بنابراین

$$m_A \vec{V}_A + m_B \vec{V}_B = 0 \quad \Rightarrow \quad m_A \vec{V}_A = -m_B \vec{V}_B \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_A = -\vec{V}_B \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{V}_A\right| = \left|\vec{V}_B\right| = V \quad (\mathrm{II})$$

بنابراین رابطه (I) به صورت زیر درخواهد آمد.

$$mg\ell = \frac{1}{2}(m)\left(2V^2\right) \quad \Rightarrow \quad V^2 = g\ell \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{g\ell} \quad (\mathrm{III})$$

اکنون رابطه سرعت نسبی بین جرم‌های A و B را می‌نویسیم.

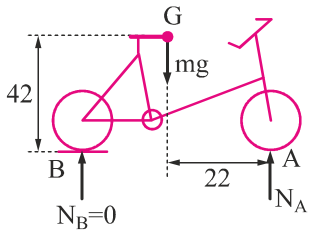
$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \quad , \quad \vec{V}_A = -\vec{V}_B \quad (\mathrm{II}) \quad , \quad V_{A/B} = \omega\ell$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_B = \vec{V}_B + \omega\ell \quad \Rightarrow \quad V = -V + \omega\ell \quad \Rightarrow \quad 2V = \omega\ell$$

$$\left.\begin{array}{r} 2V = \omega\ell \\ \mathrm{III} \rightarrow V = \sqrt{g\ell} \end{array}\right\} \quad 2\sqrt{g\ell} = \omega\ell \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \rightarrow \quad \text{گزینه ۴ درست است}$$

۹۲. گزینه ۳ درست است

برای آن که کوتاه‌ترین فاصله را به دست آوریم درحالی که ایمن نیز باشد باید چرخ عقب را در آستانه جداشدن از سطح زمین در نظر بگیریم بنابراین نمودار جسم آزاد سیستم به صورت زیر خواهدبود.



فرض می‌کنیم کـه شـتاب دوچرخـه برابـر a_G (و طبیعتـاً بـه سمت عقب (چپ)) باشد بنابراین داریم:

$$\sum M_A = I_G\ddot{\theta} + ma_G d \quad I$$

دوچرخه را در آستانه جداشدن چرخ عقب از سطح زمین در نظر گرفتیم و فرض کردیم که ایمن باشد یعنی $\ddot{\theta} = 0$ بنابراین:

$$I \Rightarrow mg(22) = 0 + ma_G(42) \Rightarrow a_G = \frac{22}{42}g$$

برای سرعت دوچرخه داریم:

$$v_0 = 15\,\text{mph} \Rightarrow v_0 = 15\times 88\times 60 = 79200\frac{\text{ft}}{\text{h}} \Rightarrow v_0 = \frac{79200}{3600} = 22\frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

اکنون داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a_G x \Rightarrow 0 - 22^2 = 2\left(-\frac{22}{42}g\right)x \Rightarrow x = \frac{462}{g},\quad g = 32.2\frac{ft}{s^2} \Rightarrow x = 14.35\,ft$$

۹۳. گزینه ۲ درست است.

مشتق کل یک کمیت‌برداری (که در دستگاه دورانی تعریف شده است) نسبت به دستگاه لخت برابر است با مشتق آن در دسـتگاه دورانی به علاوه ضرب‌برداری سرعت دورانی دستگاه نسبی در آن کمیت‌برداری برای مثال اگر دستگاه نسبی که سـرعت دورانـی دارد $x-y$ و دستگاه لخت را با $X-Y$ نشان دهیم برای سرعت داریم:

$$\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{X-Y} = \left.\frac{d}{dt}\vec{V}\right)_{x-y} + \vec{\omega}\times\vec{V}$$

برای لنگر حرکتی نیز چنین است بنابراین:

$$\left.\frac{d}{dt}H_C\right)_{X-Y} = M_C = \underbrace{\left.\frac{d}{dt}H_c\right)_{x-y}}_{\text{دستگاه متحرک}} + \vec{\omega}\times\vec{H}_c$$

۹۴. گزینه ۳ درست است.

سرعت زنجیر پس از آن که به اندازه x سقوط کند برابر است با:

$$V = \sqrt{2gx}$$

نیروی عکس‌العمل زمین از دو بخش تشکیل می‌گردد

۱) نیروی وزن زنجیر قرار گرفته روی زمین به طول x و ۲) نیروی ناشی از مومنتم ورودی ناشی از سقوط زنجیر

چگالی زنجیر را می‌توان برابر با ρ در نظر گرفت که در آن

۱) نیروی وزن زنجیر قرار گرفته روی زمین به طول x

$$\rho = \frac{m}{L}$$

بنابراین وزن طول x از زنجیر عبارت است از

$$F_1 = \rho x g$$

۱) نیروی ناشی از مومنتم سقوط زنجیر

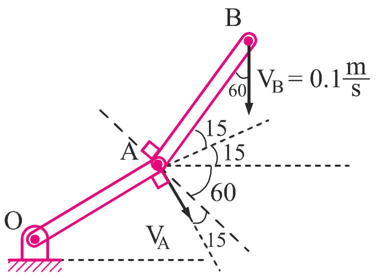
$$F_2 = \frac{dm}{dt}V = \frac{\rho dx}{dt}V = \rho V^2 = \rho\left(\sqrt{2gx}\right)^2 = 2\rho g x$$

نیروی عکس‌العمل زمین مجموع این دو نیرو است بنابراین

$$F = F_1 + F_2 = \rho g x + 2\rho g x = 3\rho g x = 3\frac{m}{l}gx = 3mg\frac{x}{L} \quad \rightarrow \quad \text{گزینه ۳}$$

۹۵ گزینه ۲ درست است

می‌دانیم که V_A عمود بر میله OA است.



با توجه به این که میله AB صلب است بنابراین باید مولفه V_B در راستای میله AB با مؤلفه V_A در راستای میله AB برابر باشد تا میله صلب فشرده یا کشیده نشود (وگرنه دیگر صلب نیست) بنابراین:

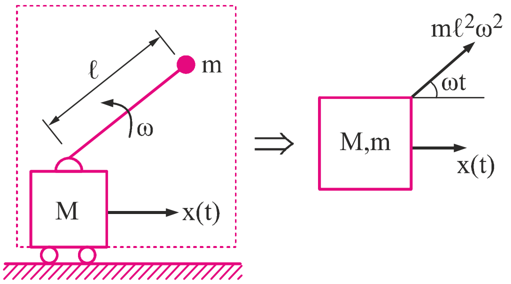
$$V_B \cos 60 = V_A \sin 15 \quad \Rightarrow \quad 0.1 \times \frac{1}{2} = V_A\,(0.259) \quad \Rightarrow \quad V_A = 0.193\frac{m}{s}$$

سرعت زاویه‌ای میله OA نیز برابر است با:

$$\omega_{OA} = \frac{V_A}{L} = \frac{0.193}{0.6} = 0.32\frac{rad}{s} \quad \rightarrow \quad \text{گزینه ۲}$$

پاسخ تشریحی توسط: میثم شعبانی مطلق

۹۶.گزینه ۴ درست است



$$\sum f_x = ma \quad \Rightarrow \quad m\ell^2\omega^2 \cos(\omega t) = (m+M)\ddot{x}$$

۹۷.گزینه ۴ درست است

در روش ریلی شکل مود باید به گونه‌ای انتخاب شود که شرایط مرزی هندسی ارضا شود. در ایـن سـؤال تنهـا گزینـه ۴ شـرایط مرزی $y(0) = y(\ell) = 0$ را برقرار می‌کند.

۹۸.گزینه ۳ درست است

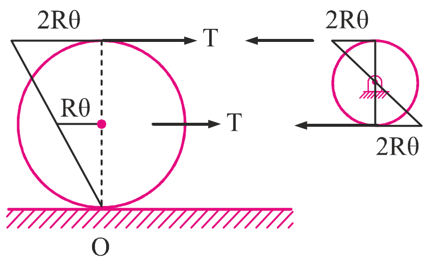
$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \left(\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{R}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{4}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{4}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}_1\dot{x}_2$$

$$= \frac{3}{4}m\dot{x}_1^2 + \frac{5}{4}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}_1\dot{x}_2$$

۹۹.گزینه ۱ درست است



$$T = k(R\theta + 2R\theta) = 3kR\theta$$

$$\sum M_o = I_o\ddot{\theta} \Rightarrow -TR - T(2R) = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} + 3TR = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} + 9kR^2\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{9kR^2}{\frac{3}{2}mR^2}} \Rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{6k}{m}}}$$

۱۰۰.گزینه ۱ درست است

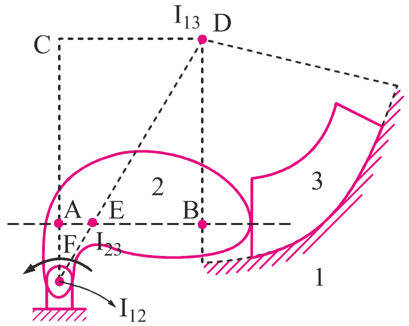
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_n^2 = \dfrac{k}{m} \\ 2\xi\omega_n = \dfrac{c}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \xi = \dfrac{c}{2\sqrt{km}} \end{cases}$$

$$m\uparrow \Rightarrow \begin{cases} \omega_n \downarrow \\ \xi \downarrow \end{cases}$$

پاسخ تشریحی توسط: مسیح لقمانی

۱۰۱.گزینه ۴ درست است.



طبق قضیه کندی مراکز آنی I_{13} و I_{12} و I_{23} روی یک خط قرار دارند. I_{13} در مرکز انحنای مسیری است که لغزنده 3 روی آن می‌لغزد یعنی نقطه D، I_{12} در محلی است که میله 2 به زمین پین شده است.

بنابراین مرکز آنی I_{23} روی خط واصل این دو نقطه است (خط FD)

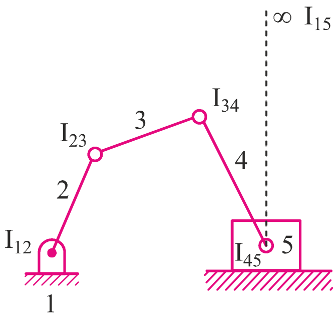
از طرفی می‌دانیم مرکز آنی روی خط عمود مشترک دو جسمی است که نسبت به یکدیگر می‌لغزند یعنی روی خط AB واقع شده است.

بنابراین I_{23} از محل تقاطع خطوط FD و AB به دست می‌آید که نقطه E است.

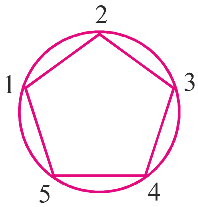
۱۰۲. گزینه ۴ درست است

سیستم به تعداد $N=\frac{n(n-1)}{2}$ مرکز آنی دوران دارد که در آن n تعداد لینک‌ها است بنابراین:

$$N=\frac{5(5-1)}{2}=10$$



اکنون ابتدا مراکز آنی دوران واضح را تعیین می‌کنیم.



همان‌گونه که از شکل فوق مشخص است برای دیگر مراکز آنی نمی‌توان اظهارنظری کرد زیرا نمی‌توان هیچ‌کدام از I_{13} و I_{14} و I_{24} و I_{25} و I_{35} را از ترکیب ضلع مشترک دو مثلث و سپس استفاده از قضیه کندی به دست آورد.

۱۰۳. گزینه ۲ درست است

برای به دست آوردن مکانیزم معادل سیستم داده شده باید ابتدا از نقطه A لینکی به مرکز انحنای دایره متصل به آن یعنی B ترسیم کرد (باتوجه به این که دو قطعه که با هم در تماس هستند دایره هستند دیگر لازم مرکز انحنای نقطه تماس را به دست آورد چون دایره هستند مرکز انحنا همان مرکز دایره است) سپس از نقطه D به مرکز دایره C باید لینکی رسم کنیم (به همان دلیل بیان شده) و سپس این دو نقطه C و B را با لینکی به یکدیگر متصل نمائیم.

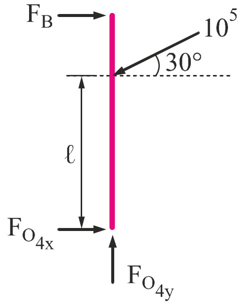
ظاهراً هم گزینه ۱ و هم گزینه ۲ می‌توانند جواب باشند ولی توجه نمائید فاصله CB از مجموع شعاع دو دایره تشکیل شده است در حالی که AB تنها شعاع دایره بزرگ‌تر است بنابراین با توجه به این که طول CB از طول AB بلندتر است گزینه ۲ جواب صحیح است.

۱۰۴ گزینه ۱ درست است

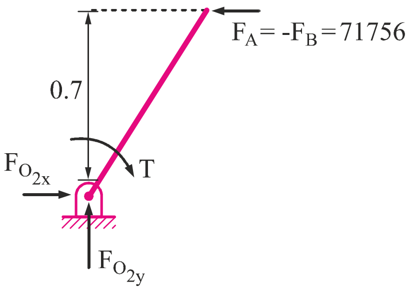
نمودار جسم آزاد لینک O_4B به صورت زیر است:

باتوجه به این که لینک AB عضو دو نیرویی است F_B باید در راستای AB باشد تا ممانی حول A ایجاد نکند بنابراین F_B افقی است و هیچ مؤلفه عمودی ندارد.

با توجه به این که سیستم ثابت است خواهیم داشت:



$$\sum M_{o_4} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B(0.7) = 10^5 \cos 30 \left.(\ell)\right|_{100} \quad \Rightarrow \quad F_B \simeq 71756N \quad , \quad \ell = 100\tan 30 \simeq 58$$



برای لینک AB داریم $\vec{F}_A=-\vec{F}_B$ و بنابراین نمودار جسم آزاد لینک O_2A به صورت مقابل است

$$F_A=-F_B=71756$$

که داریم:

$$\sum M_{o_2}=0 \quad\Rightarrow\quad F_A(0.7)=T$$

$$\Rightarrow\quad 71756(0.7)=T \quad\Rightarrow\quad T=50229\,N.m$$

که T گشتاور موتور است (در ضمن F_{o_2y} برابر صفر است (چرا؟!))

توان موتور توسط رابطه $P=T\omega$ محاسبه می‌گردد بنابراین:

$$\left.\begin{aligned}&P=T\omega\\&\omega=100\,rpm=100\frac{2\pi}{60}\,rad/s\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad P=50229\left(100\frac{2\pi}{60}\right)=526\,kW\quad,\quad 526\,kW\simeq 500\,kW$$

۱۰۵. گزینه ۳ درست است

$$\frac{\omega_3-\omega_4}{\omega_1-\omega_4}=\frac{-\left(\frac{N_2}{N_3}\right)}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right)}=-\frac{N_1}{N_3}$$

علامت منفی در سمت راست معادله به این دلیل است که چرخ‌دنده‌های 1 و 2 هم جهت و چرخ‌دنده‌های 2 و 3 در خلاف جهت یکدیگر می‌چرخند.

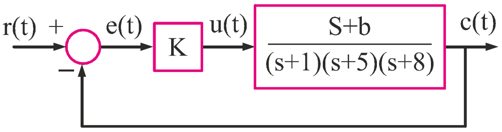
$$\omega_1=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\omega_3-\omega_4}{-\omega_4}=\frac{-N_1}{N_3}$$

با توجه به شکل داریم $N_1=N_3+2N_2$ بنابراین:

$$\frac{\omega_3-\omega_4}{-\omega_4}=-\frac{N_3+2N_2}{N_3}\quad\Rightarrow\quad\frac{-\omega_3}{\omega_4}+1=-1-2\frac{N_2}{N_3}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\omega_3}{\omega_4}=2+2\frac{N_2}{N_3}=2\left(1+\frac{N_2}{N_3}\right)\quad\to \text{گزینه ۳}$$

۱۰۶. گزینه ۲ درست است



خطای حالت ماندگار به ورودی پله واحد : $e_{ss} = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{SR(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{s\frac{1}{s}}{1+\dfrac{s+b}{(s+1)(s+S)(s+8)}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{b}{40}}$

برای صفر شدن خطای حالت ماندگار باید $b \to \infty$ میل کند که امکان‌پذیر نیست. بنابراین گزینه ۱ غلط است.

معادله مشخصه سیستم : $(s+1)(s+5)(s+8)+k(s+b)=0 \quad \Rightarrow \quad s^3+14s^2+(53+k)s+40+kb=0$

جدول راث :

s^3	1	$53+k$
s^2	14	$40+kb$
s^1	$\dfrac{14(53+k)-(40+kb)}{14}$	
s^0	$40+kb$	

شرایط پایداری:

$$\begin{cases} 53+k-\dfrac{40+kb}{14}>0 \quad \Rightarrow \quad 53+k-2.86-\dfrac{kb}{14}>0 \quad \Rightarrow \quad k\left(1-\dfrac{b}{14}\right)>-50.14 \Rightarrow b<14\left(1+\dfrac{50.14}{k}\right) \\ 40+kb>0 \quad \rightarrow \quad \text{همواره برقرار است} \end{cases}$$

چون $b>0$, $k>0$ است.

کافی است $b<14$ انتخاب شود تا این شرط برآورده شود.

برای پایداری کافی است $0<b<14$ انتخاب شود. در این شرایط به ازای تمامی مقادیر k سیستم پایدار است. یعنــی گزینــه ۲ صحیح است.

از آنجاکه سیستم مرتبه سوم است به ازای مقادیر مختلف k و b قطب‌های مسلط سیستم می‌تواند مزدوج مختلط و یـا حقیقـی باشد. بنابراین گزینه ۳ غلط است.

$$C(s)=U(s).\frac{s+b}{(s+1)(s+5)(s+8)} \quad \Rightarrow \quad C_{ss}(t)=\lim_{s\to 0} s\,C(s)$$

$$C_{ss}(t)=\lim_{s\to 0} \cancel{s}.\frac{1}{\cancel{s}}\;\frac{s+b}{(s+1)(s+5)(s+8)}=\frac{b}{40} \quad \Rightarrow$$

افزایش b، $C_{ss}(t)$ به عدد بزرگ‌تری میل می‌کند. بنابراین گزینه ۴ غلط است.

۱۰۷. گزینه ۳ درست است

$$TF=C(SI-A)^{-1}B+D$$

$$TF=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}S&0\\0&S\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-5&1\\-3&-1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+0=\begin{bmatrix}s+5&-1\\3&s+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+6s+8}\begin{bmatrix}s+1&1\\-3&s+5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^2+6s+8}\begin{bmatrix}1\\s+5\end{bmatrix}$$

$$y(s)=TF.U(s)$$

$$y_{ss}(t)=\lim_{s\to 0} sY(s)=\lim_{s\to 0}\cancel{s}\,\frac{1}{\cancel{s}}\,\frac{1}{s^2+6s+8}\begin{bmatrix}1\\s+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{8}\\\frac{5}{8}\end{bmatrix}$$

۱۰۸. گزینه ۲ درست است

از آنجا که سیستم دارای یک صفر در ناحیه راست و دو قطب مزدوج مختلط و یک قطب ساده در ناحیه چپ محور موهومی است و سیستم غیرمینیمم فاز بوده و تابع تبدیل آن می‌تواند گزینه ۱ یا ۲ باشد از آنجا که مکان هندسی روی محـور حقیقـی از $+\infty$ شروع می‌شود سیستم دارای فیدبک مثبت است. یعنی گزینه ۲ صحیح است.

۱۰۹. گزینه ۲ درست است

از آنجا که به دنبال یافتن تابع تبدیل از ورودی U خروجی Q_s هستیم می‌توان ظرف 1 را حذف و Q_1 را ورودی به سیســتم در نظر گرفته و همچنین ظرف 4 را حذف و Q_3 را خروجی از سیستم در نظر بگیریم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}U-Q_2-Q^*=\dot{x}_2\\ Q^*+Q_1-Q_3=\dot{x}_3\\ Q_2-Q_5=\dot{x}_5\\ x_2=Q_2\\ x_2-x_3=Q^*\\ x_3=Q_3\\ x_5=Q_5\end{cases}$$

معادلات 4 تا 7 را در معادلات 1 تا 3 جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} U - X_2 - (X_2 - X_3) = SX_2 & (1) \\ X_2 - X_3 + Q_1 - X_3 = SX_3 & (2) \\ X_2 - X_5 = SX_5 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \;\rightarrow\; X_2 = (S+1)X_5$$

$$(2) \;\rightarrow\; X_2 + Q_1 = (S+2)X_3 \;\Rightarrow\; X_3 = \frac{1}{S+2}X_2 + \frac{1}{S+2}Q_1 \;\Rightarrow\; X_3 = \frac{S+1}{S+2}X_5 + \frac{1}{S+2}Q_1$$

$$(1) \;\rightarrow\; U + X_3 = (S+2)X_2 \;\Rightarrow\; U + \frac{S+1}{S+2}X_5 + \frac{1}{S+2}Q_1 = (S+2)X_2$$

$$U + \frac{1}{S+2}Q_1 = (S+2)(S+1)X_5 - \frac{S+1}{S+2}X_5 \;\Rightarrow\; U + \frac{1}{S+2}Q_1 = \frac{(S+1)((S+2)^2 - 1)}{S+2}X_5$$

$$U + \frac{1}{S+2}Q_1 = \frac{(S+1)\left(S^2 + 4S + 3\right)}{S+2}X_5 = \frac{(S+1)^2(S+3)}{S+2}X_5 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{X_5}{U} = \frac{S+2}{(S+1)^2(S+3)}}$$

۱۱۰.گزینه ۱ درست است

معادله مشخصه : $(s-a)(s+b) + k(s+c) = 0$

$$s^2 + (b - a + k)s + kc - ab = 0$$

شرایط پایداری:

$$\begin{cases} b - a + k > 0 \;\Rightarrow\; k > a - b & (\mathrm{I}) \\ kc - ab > 0 \;\Rightarrow\; k > \dfrac{ab}{c} & (\mathrm{II}) \end{cases} \qquad (\mathrm{I}) \cap (\mathrm{II}) = k > \max\left\{a - b \,,\, \frac{ab}{c}\right\}$$