پاسخنامه

موسسه مشاوره و برنامه ریزی ۳گام

۱. گزینه ۲ در ست است.

لغو کردن

۲. گزینه ۴ درست است.

اشباع کردن

۳. گزینه ۱ درست است.

خـیـس

۴. گزینه ۳ درست است.

رکود

۵. گزینه ۴ درست است.

مصیبت ـ بلا

۶. گزینه ۲ درست است.

نوعدوستی

۷. گزینه ۳ درست است.

۸. گزینه ۱ درست است.

شایع ـ گسترده

۹. گزینه ۲ درست است.

افزایش دادن

۱۰. گزینه ۱ درست است.

فراوان ـ زیاد

۱۱. گزینه ۳ درست است.

۱۲. گزینه ۴ درست است.

۱۳. گزینه ۱ درست است.

۱۴. گزینه ۲ درست است.

۱۵. گزینه ۴ درست است.

۱۶. گزینه ۳ درست است.

۱۷. گزینه ۱ درست است.

۱۸. گزینه ۴ درست است.

۱۹. گزینه ۴ درست است.

۲۰. گزینه ۲ درست است.

۲۱. گزینه ۱ درست است.

۲۲. گزینه ۴ درست است.

۲۳. گزینه ۳ درست است.

۲۴. گزینه ۲ درست است.

۲۵. گزینه ۳ درست است.

۲۶. گزینه ۲ درست است.

۲۷. گزینه ۱ درست است.

۲۸. گزینه ۳ درست است.

۲۹. گزینه ۴ درست است.

۳۰. گزینه ۱ درست است.

۳۱. **گزینه ۳ درست است.**

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{n^{\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}}{n^{\frac{3}{2}}}+\dots+\frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\dots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right\}$$
$$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

۳۲. **گزینه ۲ درست است.**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{4\sqrt[n]{n}}\right|}<1\ \rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n-1}\right||x-2|}{\sqrt[n]{4}\,\sqrt[n^2]{n}}<1\ \rightarrow\ |x-2|<1\ \rightarrow$$
$$-1<x-2<1\ \rightarrow\ 1<x<3$$

پس یکی از گزینه‌های اول یا دوم صحیح هستند.

در $x=1$ سری موردنظر تبدیل می‌شود به:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{4\sqrt[n]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}(-1)^{-1}}{4\sqrt[n]{n}}=-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

که واگرا می‌باشد، زیرا شرط لازم برای همگرانی را ندارد و لذا باید گزینه دوم صحیح باشد.

۳۳. **گزینه ۴ درست است.**

$$I_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$I_3 = \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$$

با تغییر متغیر $\sqrt{1-x^2} = t$ داریم:

$$1-x^2 = t^2 \quad \to \quad -xdx = tdt$$

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,xdx = \int_1^0 t(-tdt) = \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^1 \quad \frac{1}{3}$$

$$I_3 = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,xdx = \int_1^0 \left(1-t^2\right)t(-tdt) = \left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 \quad \frac{2}{15}$$

ملاحظه می‌شود:

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{15}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$$

پس حاصل k به ازاء $n=3$ باید $\frac{2}{5}$ باشد که فقط با گزینه چهارم یعنی $\frac{n-1}{n+2}$ انطباق دارد.

راه دیگر:

$$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{n-1}\left(1-x^2\right)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\begin{cases} x^{n-1}\left(1-x^2\right) = u \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = dv \end{cases} \to \begin{cases} \left((n-1)x^{n-2}-(n+1)x^n\right)dx = dv \\ -\sqrt{1-x^2} = v \end{cases}$$

$$I_n = \left(-\sqrt{1-x^2}\,x^{n-1}\left(1-x^2\right)\right)\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \left((n-1)x^{n-2}-(n+1)x^n\right)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n+1)I_n \quad \to$$

$$(n+2)I_n = (n-1)I_{n-2} \quad \to$$

$$I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$$

راه دیگر:

با تغییر متغیر $x = \sin\theta$ داریم:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$\begin{cases} \cos\theta = u \\ \sin^2\theta\cos\theta d\theta = dv \end{cases} \to \begin{cases} -\sin\theta d\theta = du \\ \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}\theta = v \end{cases}$$

$$I_n=\left(\frac{1}{n+1}\cos\theta\sin^{n+1}\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n}\theta\sin^{2}\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n}\theta\left(1-\cos^{2}\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n}\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n}\theta\cos^{2}\theta d\theta\right\}\Rightarrow$$

$$I_n=\frac{1}{n+1}\left\{(n-1)I_{n-2}-I_n\right\}\rightarrow$$

$$I_n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n-1}{n+1}I_{n-2}\rightarrow$$

$$I_n\frac{n+2}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}I_{n-2}\rightarrow$$

$$I_n=\frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$$

۳۴. گزینه ۴ درست است.

$$\cosh(a+b)\quad\frac{e^{a+b}+e^{-(a+b)}}{2}$$

$$\cosh a\cosh b-\frac{e^{a}+e^{-a}}{2}\frac{e^{b}+e^{-b}}{2}$$

$$\frac{e^{a+b}+e^{a-b}+e^{b-a}+e^{-(a+b)}}{4}$$

$$\sinh a\sinh b\quad\frac{e^{a}-e^{-a}}{2}\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}$$

$$\frac{e^{a+b}-e^{a-b}-e^{b-a}+e^{-(a+b)}}{4}$$

ملاحظه می‌شود:

$$\cosh a\cosh b+\sinh a\sinh b=\cosh(a+b)$$

و به همین ترتیب می‌توان نشان داد:

$$\sinh a\cosh b+\cosh a\sinh b=\sinh(a+b)$$

به ازاء $b=-a$ داریم:

$$\cosh(a+b)=\cosh 0=1$$

$$\begin{cases}\cosh a\cosh b-\sinh a\sinh b=\cosh^2 a+\sinh^2 a\neq 1\\ \cosh a\cosh b+\sinh a\sinh b=\cosh^2 a-\sinh^2 a=1\end{cases}$$

$$\sinh(a+b)=\sinh 0=0$$

$$\begin{cases}\sinh a\cosh b-\cosh a\sinh b=\sinh a\cosh a+\cosh a\sinh a\neq 0\\ \sinh a\cosh b+\cosh a\sinh b=\sinh a\cosh a-\cosh a\sinh a=0\end{cases}$$

۳۵. گزینه ۲ درست است.

روی نیم کره بالایی از کره داده شده داریم:

$$ds=\frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

و سطح بریده شده از روی این نیم‌کره توسط استوانه $x^2+y^2=ax$ تصویرش روی صفحه xy داخل دایره $x^2+y^2=ax$ می‌باشد، بنابراین کل سطح موردنظر چنین محاسبه می‌شود:

$$A=2\iint_{D:x^2+y^2\leq ax}\frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

معادله $x^2+y^2=ax$ در مختصات قطبی چنین است:

$$r^2=ar\cos\theta \quad\to\quad r=a\cos\theta \quad , \quad \frac{-\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

$$A=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\frac{ardrd\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta$$

$$=-4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{a^2-a^2\cos^2\theta}-\sqrt{a^2}\right)d\theta$$

$$=-4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-1)d\theta$$

$$=-4a^2\ (-\cos\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-4a^2\left(-\frac{\pi}{2}+1\right)=2a^2(\pi-2)$$

۳۶. گزینه ۱ درست است.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(x-y)}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta r\sin\theta(r\cos\theta-r\sin\theta)}{r^2}$$

$$=\lim_{r\to 0}r\cos\theta\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)=0=f(0)$$

پس f در $(0,0)$ پیوسته است و گزینه دوم مردود می‌شود.

طبق تعریف مشتق سویی داریم:

$$\frac{df}{d\vec{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{tu_1tu_2\left(tu_1-tu_2\right)}{\left(tu_1\right)^2+\left(tu_2\right)^2}-0}{t}$$

$$\frac{u_1u_2\left(u_1-u_2\right)}{u_1 2+u_2 2}=u_1u_2\left(u_1-u_2\right)$$

و گزینه چهارم مردود می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{(\Delta x)(0)(\Delta x-0)}{(\Delta x)^2+(0)^2}\quad 0}{\Delta x}-0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta x)-f(0,0)}{\Delta y}\quad\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{(0)(\Delta y)(0-\Delta y)}{(0)^2(\Delta y)^2}\quad 0}{\Delta y}\quad 0$$

۳۷. گزینه ۱ درست است.

$$\vec{r}=\left(\ln t,\sqrt{2}\,t,\frac{t^2}{2}\right)$$

$$\vec{r}'=\left(\frac{1}{t},\sqrt{2}\,,t\right)=\vec{v}\ \text{بردار سرعت}$$

$$\vec{r}''=\left(-\frac{1}{t^2},0,1\right)=\vec{a}\ \text{بردار شتاب}$$

بردار مماس یکه عبارت است از:

$$\vec{T}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{\left(\frac{1}{t},\sqrt{2}\,,t\right)}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+2+t^2}}=\frac{\left(\frac{1}{t},\sqrt{2}\,,t\right)}{\left(\frac{1}{t}+t\right)}\quad\frac{\left(1,\sqrt{2}\,t,t^2\right)}{1+t^2}$$

(گزینه سوم مردود می‌شود)

امتداد بردار قایم نوع دوم عبارت است از:

$$\vec{v}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} & & k\\ \frac{1}{t} & & t\\ \frac{1}{t^2} & 0 & \end{vmatrix}=\sqrt{2}\,i-\frac{2}{t}j+\frac{\sqrt{2}}{t^2}k\equiv t^2 i-\sqrt{2}\,tj+k$$

(گزینه دوم مردود می‌شود.)

مقدار انحناء چنین به دست می‌آید:

$$k(t)=\frac{\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|}{\left|\vec{r}'\right|^3}$$

$$\frac{\overline{2+\frac{4}{t^2}+\frac{2}{t^4}}}{\left(\left(\frac{1}{t}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+(t)^2\right)^3}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{t^2}\left(t^2+1\right)}{\left(\frac{1}{t}+t\right)^3}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{t^2}\left(t^2+1\right)}{\frac{\left(t^2+1\right)^3}{t^3}} \quad \frac{\sqrt{2}\,t}{\left(t^2-1\right)^2}$$

۳۸. گزینه ۳ درست است.

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=y\left(e^{-x^2-y^2}-2x^2e^{-x^2-y^2}\right)=y\left(1-2x^2\right)e^{-x^2-y^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}=x\left(e^{-x^2-y^2}-2y^2e^{-x^2-y^2}\right)=x\left(1-2y^2\right)e^{-x^2-y^2}\end{cases}$$

نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x=y=0\\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$f(0,0)=0$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}e^{-1}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}e^{-1}$$

پس گزینه سوم صحیح است.

توجه داریم وقتی $x\to\infty$ یا $y\to\infty$، داریم $f\to 0$

۳۹. گزینه ۳ درست است.

معادله مرتبه اول خطی است و داریم:

$$\begin{aligned}y(t)&=e^{-\int\frac{t+1}{t}dt}\left\{\int 2te^{-t}.e^{\int\frac{t+1}{t}dt}dt+c\right\}\\ &=e^{-(t+\ln t)}\left\{\int 2te^{-t}.e^{t+\ln t}dt+c\right\}\\ &=\frac{e^{-t}}{t}\left\{\int 2te^{-t}.te^{t}dt+c\right\}\\ &=\frac{e^{-t}}{t}\left\{t^2+c\right\}=te^{-t}+\frac{ce^{-t}}{t}\end{aligned}$$

چون قرار است حد جواب مسأله در $t=0$ برابر صفر باشد باید $c=0$ و لذا:

$$y(t)=te^{-t}\quad\rightarrow\quad y(1)=1e^{-1}=\frac{1}{e}$$

پس باید $a=\frac{1}{e}$

۴۰. گزینه ۱ درست است.

معادله از نوع کامل است زیرا:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x\right)$$
$$=e^{xy}\cos 2x+xye^{xy}\cos 2x-2xe^{xy}\sin 2x$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xy}\cos 2x-3\right)$$
$$=e^{xy}\cos 2x+xye^{xy}\cos 2x-2xe^{xy}\sin 2x$$

و جواب عمومی چنین می‌باشد:

$$e^{xy}\cos 2x+x^2-3y=c$$

شرط گذشتن جواب از مبدأ نتیجه می‌دهد $c=1$ و لذا:

$$e^{xy}\cos 2x+x^2-3y=1$$

به ازاء $x=\frac{\pi}{4}$ به دست می‌آید:

$$e^{\frac{\pi}{4}y}\cos\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-3y=1\quad\rightarrow$$
$$y=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi^2}{16}-1\right)=\frac{\pi^2}{48}-\frac{1}{3}$$

۴۱. گزینه ۴ درست است.

مجموع ضرایب معادله صفر است زیرا:

$$(x)+(1-2x)+(x-1)=0$$

پس یک پایه جواب معادله e^x است.

اگر پایه جواب دوم معادله را $u(x)e^x$ فرض کنیم داریم:

$$u(x)=\int\frac{1}{\left(y_1(x)\right)^2}\,e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}\,dx$$
$$=\int\frac{1}{\left(e^x\right)^2}e^{-\int\frac{1-2x}{x}\cancel{dx}}\,dx$$
$$=\int\frac{1}{e^{2x}}e^{-\ln x+2x}dx=\int\frac{1}{e^{2x}}e^{-\ln x}\,e^{2x}\,dx$$
$$=\int\frac{1}{x}dx=\ln x$$

پس پایه جواب دوم چنین می‌باشد:

$$\ln x\times e^x$$

بنابراین گزینه چهارم صحیح است.

۴۲. گزینه ۳ درست است.

معادله از نوع کوشی غیرهمگن است:

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+\lambda(\lambda-1)\underbrace{-2\lambda+2}_{-2(\lambda-1)}=0 \quad \rightarrow$$ معادله مشخصه

$$(\lambda-1)\{\lambda(\lambda-2)+\lambda-2\}=0 \quad \rightarrow$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-2)=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=1,-1,2$$

پس پایه‌های جواب معادله همگن عبارتند از x^1, x^{-1}, x^2 با تغییر متغیر $t=\ln x$ معادله کوشی غیرهمگن داده شده تبدیل به معادله با ضرایب ثابت غیرهمگن زیر می‌شود.

$$(D-1)(D^2-D-2)y=2e^{4t} \quad \rightarrow$$

$$y_p=\frac{1}{(D-1)(D^2-D-2)}(2e^{4t}) \quad \underline{D\rightarrow 4}$$

$$y_p=\frac{1}{(4-1)(16-4-2)}(2e^{4t})=\frac{1}{15}e^{4t}=\frac{1}{15}x^4$$

لذا جواب عمومی مسأله اصلی چنین می‌باشد:

$$y=Ax+Bx^{-1}+Cx^2+\frac{1}{15}x^4$$

که به ازاء A و B و Cهای دلخواه هیچگاه به گزینه سوم منجر نمی‌شود.

توجه داریم بعد از یافتن پایه‌های جواب، بدون نیاز به یافتن جواب خصوصی هم می‌توان گزینه تست را انتخاب کرد.

۴۳. گزینه ۲ درست است.

از معادلات دستگاه تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{cases} SX_1-x_1(0)=X_1-2X_2 \\ SX_2-x_2(0)=3X_1-4X_2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} (S-1)X_1+2X_2=-1 \\ -3X_1+(S+4)X_2=2 \end{cases}$$

با ضرب معادله اول در 3 و ضرب معادله دوم در $(S-1)$ و جمع معادلات حاصله به دست می‌آید:

$$\{(3)(2)+(S-1)(S+4)\}X_2=(3)(-1)+(S-1)(2) \quad \rightarrow$$

$$(S^2+3S+2)X_2=2S-5 \quad \rightarrow$$

$$X_2=\frac{2S-5}{(S+1)(S+2)}=\frac{-7}{S+1}+\frac{9}{S+2} \quad \rightarrow$$

$$x_2(t)=-7e^{-t}+9e^{-2t}$$

با قرار دادن این عبارت در معادله دوم دستگاه داریم:

$$7e^{-t}-18e^{-2t}=3x_1+28e^{-t}-36e^{-2t} \quad \rightarrow$$

$$x_1(t)=-7e^{-t}+6e^{-2t}$$

راه دیگر:

از معادله دوم دستگاه در $t=0$ به دست می‌آید:

$$x'_2(0)=3x_1(0)-4x_2(0)=3(-1)-4(2)=-11$$

حال با استفاده از اپراتور $D=\frac{d}{dt}$ معادلات دستگاه چنین می‌شود:

$$\begin{cases}Dx_1=x_1-2x_2\\ Dx_2=3x_1-4x_2\end{cases}\to\begin{cases}(D-1)x_1+2x_2=0\\ -3x_1+(D+4)x_2=0\end{cases}$$

با ضرب معادله اول در 3 و ضرب معادله دوم در $(D-1)$ و جمع معادلات حاصله داریم:

$$((3)(2)+(D-1)(D+4))x_2=0\quad\to$$

$$\left(D^2+3D+2\right)x_2=0$$

معادله مشخصه: $\lambda^2+3\lambda+2=0\quad\to\quad\lambda=-1,-2$

لذا جواب عمومی $x_2(t)$ چنین است:

$$x_2(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}$$

با اعمال شرایط اولیه به دست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l}x_2(0)=2\quad\to\quad A+B=2\\ x'_2(1)=-11\quad\to\quad -A-2B=-11\end{array}\right\}\to\quad A=-7,B=9$$

پس داریم:

$$x_2(t)=-7e^{-t}+9e^{-2t}$$

۴۴. گزینه ۳ درست است.

$$f(z)=(1+z)^{\frac{1}{z}}\quad\to\quad \ln f(z)=\frac{1}{z}\ln(1+z)$$

و با توجه به بسط $\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}\ldots$ داریم:

$$\ln f(z)=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\ldots\right)\to$$

$$\ln f(z)=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\frac{z^3}{4}\ldots$$

با مشتق‌گیری‌های متوالی به دست می‌آید:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{1}{2}+\frac{2z}{3}-\frac{3z^2}{4}\ldots$$

$$\frac{f''(z)f(z)-f'(z)^2}{f^2(z)}\quad\frac{2}{3}-\frac{6z}{4}-$$

حد تابع $f(z)$ در $z=0$ برابر e بوده و لذا:

$$\frac{f'(0)}{e}=-\frac{1}{2}\quad\to\quad f'(0)=-\frac{e}{2}$$

$$\frac{f''(0)(e)-\left(-\frac{e}{2}\right)^2}{(e)^2} \quad \frac{2}{3}$$

$$ef''(0)=\frac{2}{3}e^2+\frac{1}{4}e^2 \quad \rightarrow \quad f''(0)=\frac{11}{12}e$$

و ضریب z^2 برابر می‌شود با:

$$\frac{f''(0)}{2!}=\frac{11}{24}e$$

۴۵. گزینه ۳ درست است.

برای $z \neq 0$ داریم:

$$f(z)=\frac{(\bar{z})^2}{z}=\frac{\left(re^{-i\theta}\right)^2}{re^{i\theta}}=re^{-3i\theta}=r(\cos 3\theta - i\sin 3\theta) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u=r\cos 3\theta \\ v=-r\sin 3\theta \end{cases}$$

طبق تعریف مشتق در یک نقطه می‌توان نوشت:

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{\substack{v\to 0\\ \forall\theta}}\frac{re^{-3i\theta}-0}{re^{i\theta}}=e^{-4i\theta} \quad (\text{وابسته به } \theta)$$

پس حد فوق که مبین $f'(0)$ می‌باشد موجود نیست و تابع f در $z=0$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

اما معادلات کوشی ریمان یعنی $\begin{cases} ru_r=v_\theta \\ -u_\theta=rv_r \end{cases}$ در مبدأ یعنی $z=0$ برقرارند چرا که:

$$\left.\begin{matrix} ru_r=r(\cos 3\theta) \\ v_\theta=-3r\cos 3\theta \end{matrix}\right\} \rightarrow$$ در $z=0$ که متناظر $r=0$ می‌باشد با هم برابرند.

$$\left.\begin{matrix} -u_\theta=3r\sin 3\theta \\ rv_r=r(-\sin 3\theta) \end{matrix}\right\} \rightarrow$$ در $z=0$ که متناظر $r=0$ می‌باشد با هم برابرند.

بنابراین گزینه سوم صحیح است.

دقت داریم مثلاً $u_r=\cos 3\theta$ که در $(0,0)$ پیوسته نیست زیرا بسته به آن که با چه θای به $(0,0)$ نزدیک شـویم $\cos 3\theta$ مقادیر متفاوتی خواهد داشت.

۴۶. گزینه ۲ درست است.

$$f(z)=e^z\sinh\frac{1}{z}$$
$$=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\dots\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3 3!}+\frac{1}{z^5 5!}+\dots\right)$$

$$\text{ضریب جمله } \frac{1}{z}=1+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{4!5!}+\dots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$$

۴۷. گزینه ۱ درست است.

گزینه‌ای صحیح است که دو شرط مرزی همگن

$$\begin{cases} T(0,y)=T(a,y) \\ T_x(0,y)=T_x(a,y) \end{cases}$$

را ارضا کند و البته کامل‌ترین گزینه پاسخ تست خواهد بود.

توابع $\sin\frac{2n\pi x}{a}$ و $\cos\frac{2n\pi x}{a}$ و $\frac{1}{2}$ دارای شرایط موردنظر هستند چرا که در همگی آنها:

۱. حاصل کار در $x=0$ و $x=a$ یکسان است.

۲. مشتق حاصل کار نسبت به x در $x=0$ و $x=a$ یکسان است.

دقت داریم گزینه چهارم به خاطر نداشتن عدد ثابت $\frac{1}{2}$ مردود می‌شود.

گزینه دوم به خاطر مثلاً جمله $\cos\frac{n\pi x}{a}$ که $x=0$ و $x=a$ حاصل یکسان ندارد مردود می‌شود.

گزینه سوم به خاطر مثلاً جمله $\cos\frac{(2n-1)\pi x}{a}$ که در $x=0$ و $x=a$ حاصل یکسان ندارد مردود می‌شود.

۴۸. گزینه ۳ درست است.

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)dx$$

$$=\frac{2}{L}\left(\frac{Lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^L$$

$$=\frac{2}{L}\left(\frac{L^3}{2}-\frac{L^3}{3}\right)=\frac{L^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx$$

مشتق		انتگرال
$xL-x^2$		$\cos\frac{n\pi}{L}x$
	$\searrow +$	
$L-2x$		$\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x$
	$\searrow -$	
-2		$-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{L}x$
0		$\frac{-L^3}{n^3\pi 3}\sin\frac{n\pi}{L}x$

$$a_n=\frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\left(xL-x^2\right)\sin\frac{n\pi}{L}x+\frac{L^2}{n^2\pi^2}(L-2x)\cos\frac{n\pi}{L}x+\frac{2L^3}{n^3\pi^3}\sin\frac{n\pi}{L}x\right)\Bigg|_0^L$$

$$=\frac{2}{L}\left(-\frac{L_3}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{L_3}{n^2\pi^2}\right)\equiv\frac{2L}{n^2\pi^2}(\cos n\pi+1)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-4L^2}{n^2\pi^2} & \text{زوج } n\\ 0 & \text{فرد } n\end{cases}$$

پس سری فوریه کسینوسی تابع چنین است:

$$f(x)=\frac{L^2}{6}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4L^2}{(2m)^2\pi^2}\cos\frac{2m\pi}{L}x=\frac{L^2}{6}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{4(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi x}{L}$$

۴۹. گزینه ۴ درست است.

$f(x)$ باید ضرایب انتگرال فوریه کسینوسی تابع $g(\omega)=\begin{cases}1-\omega & 0<\omega<1\\ 0 & \omega>0\end{cases}$ باشد.

یعنی:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}g(\omega)\cos\omega\, d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}(1-\omega)\cos x\omega\, d\omega$$

مشتق

$$\begin{array}{lcl} 1-\omega & & \cos x\omega \\ & \searrow + & \\ -1 & & \frac{1}{x}\sin x\omega \\ & \searrow - & \\ 0 & & -\frac{1}{x^2}\cos x\omega \end{array}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\omega}{x}\sin x\omega-\frac{1}{x^2}\cos x\omega\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{x^2}\cos x+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2(1-\cos x)}{\pi x^2}$$

۵۰. گزینه ۳ درست است.

از جدول تبدیلات فوریه می‌دانیم:

$$F\left(\frac{\sin ax}{x}\right)=\begin{cases}\pi & |\omega|<a\\ 0 & |\omega|>a\end{cases}$$

پس:

$$F\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\begin{cases}\pi & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}=\begin{cases}0 & \omega<-1\\ \pi & -1<\omega<1\\ 0 & \omega>1\end{cases}$$

۵۱. گزینه ۴ درست است.

۵۲. گزینه ۳ درست است.

$$\Delta S = \Delta S_۱ + \Delta S_۲ = \frac{m}{۲} C \ln \frac{T_f}{T_۱} + \frac{m}{۲} C \ln \frac{T_f}{T_۲}$$

T_f: دمای تعادل

$$\Rightarrow \quad \Delta S = \frac{m}{2} C \ln \frac{T_f^2}{T_1 T_2} = mC \ln \frac{T_f}{(T_1 T_2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (\mathrm{I})$$

به دست آوردن T_f :

اگر فرض کنیم $T_1 > T_2$ آن‌گاه $T_2 < T_f < T_1$ و داریم:

$$|Q_1| = |Q_2| \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2} C (T_1 - T_f) = \frac{m}{2} C (T_f - T_2) \quad \Rightarrow \quad T_f = \frac{T_1 + T_2}{2} \qquad (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I}),(\mathrm{II}) \quad \Rightarrow \quad \Delta S = mC \ln \left(\frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}} \right)$$

۵۳. گزینه ۲ درست است.

$$\left.\begin{matrix} Tds = du + Pdv \\ ds = 0 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad du = Pdv$$

$$\Rightarrow \quad B(Pdv + vdP) = -Pdv$$

$$\Rightarrow \quad (B+1)Pdv = -BvdP \quad \Rightarrow \quad -\frac{B+1}{B}\frac{dv}{v} = \frac{dP}{P} \quad \Rightarrow \quad -\frac{B+1}{B} \ln v = \ln P + C$$

$$\Rightarrow \quad v^{-\frac{B+1}{B}} = KP \quad \Rightarrow \quad Pv^{\frac{B+1}{B}} = \text{ثابت}$$

۵۴. گزینه ۴ درست است.

$$C_3H_8+5\left(O_2+3.76N_2\right)\ \rightarrow\ 3CO_2+4H_2O+5\times3.76\ N_2$$
$$C_3H_8+1.6\times5\left(O_2+3.76N_2\right)\ \rightarrow\ 2.4CO_2+0.6CO+4H_2O+8\times3.76N_2+xO_2$$

موازنه برای اکسیژن:

$$16=9.4+2x\ \Rightarrow\ x=3.3$$

۵۵. گزینه ۳ درست است.

۵۶. گزینه ۱ درست است.

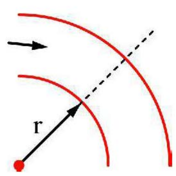
$$W_{net}=\eta_{th}Q_H=\eta_{th}k\left(T_H-T_a\right)$$
$$\eta_{th}=1-\frac{T_L}{T_a}\ \Rightarrow\ W_{net}=\left(1-\frac{T_L}{T_a}\right)k\left(T_H-T_a\right)$$
$$\frac{dW_{net}}{dT_a}=0\ \Rightarrow\ T_a=\sqrt{T_LT_H}$$

۵۷. گزینه ۲ درست است.

۵۸. گزینه ۳ درست است.

۵۹. گزینه ۱ درست است.

معادله اولر در راستای شعاع : $\frac{dP}{dr}=\rho\frac{V^2}{r}\ \Rightarrow\ \frac{dP}{dr}=Ar^2\frac{B^2}{r^3}\ \Rightarrow\ \frac{dP}{dr}=\frac{AB^2}{r}\ \xrightarrow{\int}\ \Delta P=AB^2\ln\frac{R_2}{R_1}$



۶۰. گزینه ۴ درست است.

معادله ناویراستوکس در جهت x:

$$\rho\left(\cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial t}}+u\cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial x}}+\cancelto{0}{v}\frac{\partial u}{\partial y}+\cancelto{0}{w}\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\tau_{xz}}{\partial z}$$

$$\tau_{xx}=2\mu\frac{\partial u}{\partial x}=0\qquad \tau_{xz}=\mu\left(\cancelto{0}{\frac{\partial w}{\partial x}}+\cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial z}}\right)=0\ \Rightarrow\ 0=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}\ \Rightarrow\ \frac{\partial\tau}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial x}$$

۶۱. گزینه ۳ درست است.

$$\left.\begin{array}{l} h_{f_A}=h_{f_B}\\ h_f=f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}=\frac{8fL}{D^5g\pi^2}Q^2\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \frac{1}{D_A^5}Q_A^2=\frac{1}{D_B^5}Q_B^2\ \Rightarrow\ \frac{Q_A}{Q_B}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

۶۲. گزینه ۳ درست است.

۶۳. گزینه ۴ درست است.

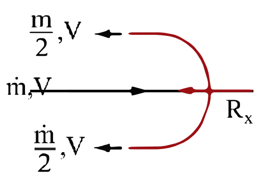
تابع جریان برای جریان تراکم‌ناپذیر تعریف می‌شود.

۶۴. گزینه ۲ درست است.

$$\sum F_x = \sum(\dot{m}V_x)_{out} - \sum(\dot{m}V_x)_{in}$$

$$\Rightarrow \quad -R_x = 2\times\frac{\dot{m}}{2}(-V) - \dot{m}V$$

$$\Rightarrow \quad R_x = 2\dot{m}V$$



$$(b): \quad R_x = \dot{m}V(1+\cos\alpha)$$

$$(c): \quad R_x = \dot{m}V(1-\cos\alpha)$$

$$(d): \quad R_x = \dot{m}V$$

۶۵. گزینه ۴ درست است.

$$T = 1800 - 4x^2$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d^2T}{dx^2} = -8 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -0.002$$

۶۶. گزینه ۱ درست است.

۶۷. گزینه ۴ درست است.

$\frac{d^2T}{dx^2} = -\dot{q} < 0$ تقعر رو به پایین:

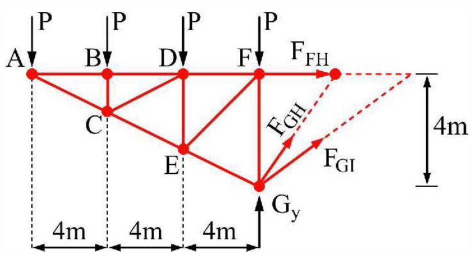
$$\left|\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} < \left|\frac{dT}{dx}\right|_{x=1}$$

۶۸. گزینه ۲ درست است.

۶۹. گزینه ۳ درست است.

۷۰. گزینه ۴ درست است.

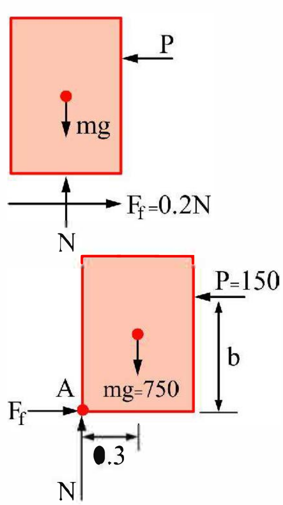
۷۱. گزینه ۳ درست است.



$$\sum M_G = 0$$

$$-F_{FH} \times 4 + P \times 4 + P \times 8 + P \times 12 = 0$$
$$F_{FH} = 6P$$

۷۲. گزینه ۳ درست است.



$$\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; N = mg = 75 \times 10 = 750$$

$$\sum F_x = 0 \;\rightarrow\; P = 0.2N = 0.2 \times 750 = 150\,N$$

برای لحظه واژگونی:

$$\sum M_A = 0 \;\rightarrow\; 750(0.3) - 150 \times b = \;\rightarrow\; b = 1.5m$$

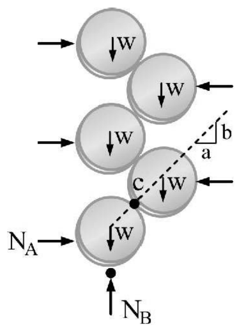
۷۳. گزینه ۱ درست است.

ممان‌اینرسی مربع پس از α درجه دوران حول مرکز آن تغییر نخواهد کرد.

$$I_{x_c} = I_{y_c} = I_x = \frac{a^4}{12}$$

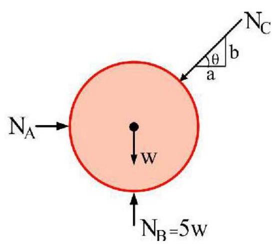
۷۴.گزینه ۴ درست است.

برای کل مجموعه:



$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_B = 5W$$

برای سکه پایینی:



$$\sum F_y = 0 N_C \sin\theta + w = 5w$$

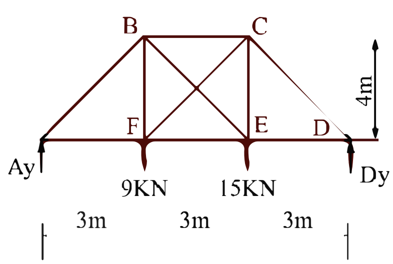
$$N_C = \frac{4w}{\sin\theta} \quad (I)$$

$$\sum F_x = 0 \quad N_C \cos\theta = N_A \rightarrow N_C = \frac{NA}{\cos\theta} \quad (II)$$

$$I, II \rightarrow \frac{4W}{\sin\theta} = \frac{N_A}{\cos\theta} \rightarrow N_A = 4W\cot\theta = 4w\frac{a}{b}$$

$$\rightarrow \frac{N_A}{N_B} = \frac{4}{5}\frac{a}{b}$$

۷۵.گزینه ۲ درست است.



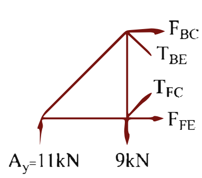
$$\sum M_D = 0$$

$$15\times3 + 9\times6 = A_y \times 9 \rightarrow A_y = 11kN$$

$$\sum F_y = \rightarrow 9 + 15 - 11 = D_y$$

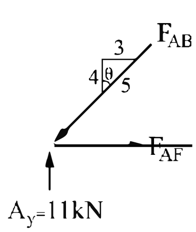
$$\rightarrow D_y = 13kN$$

برای ارضا شدن تعادل:



$$F_{BE} > 0$$

در گره A داریم:



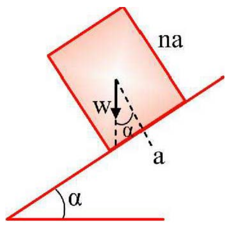
$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{AB}\cos\theta = 11$$

$$F_{AB} = \frac{11}{\frac{4}{5}} = \frac{55}{4}$$

که به صورت فشاری فرض شده است.

۷۶.گزینه ۱ درست است.

برای عدم واژگون شدن:



$$\tan\alpha \le \frac{\frac{a}{2}}{\frac{na}{2}} = \frac{1}{n} \quad \xrightarrow{\tan\alpha=\mu} \quad \mu \le \frac{1}{n} \rightarrow n \le \frac{1}{\mu}$$

برای عدم لغزش:

$$\tan\alpha \le \mu$$

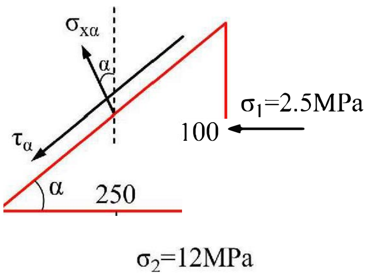
۷۷.گزینه ۴ درست است.

$$\sigma_{x\alpha} \quad \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

$$\sigma_{x\alpha} = \frac{-2.5+12}{2} + \frac{-2.5-12}{2}\cos(\pi+2\alpha)$$

$$\sigma_{x\alpha} = 4.75 + \frac{-14.5}{2} \times \left(-\left(1-25in^2\alpha\right)\right)$$

$$\alpha_{x\alpha} = 4.75 + 7.25\left(1-2\left(\frac{100}{\sqrt{250^2+100^2}}\right)^2\right) = 10$$



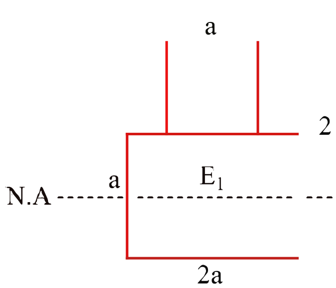
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

$$\tau_\alpha = \frac{12+2.5}{2} \times (-25\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$\tau_\alpha = -14.5 \times \frac{100}{\sqrt{250^2+100^2}} \times \frac{250}{\sqrt{250^2+100^2}} \quad -5$$

که علامت τ_x به صورت مثبت یا منفی قابل قبول است.

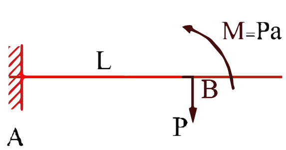
۷۸.گزینه ۲ درست است.



$$\bar{x} \quad \frac{\bar{x}_1A_1+\bar{x}_2A_2}{A_1+A_2} \quad \frac{\left(a+\frac{a}{2}\right)a^2 + \frac{a}{2}2a \times a}{a^2+2a \times a}$$

$$\bar{x} = \frac{5}{\ }a$$

۷۹.گزینه ۱ درست است.

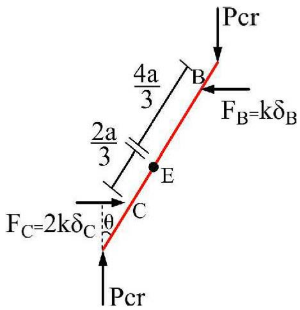


$$y_B = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{ML^2}{2EI} = 0$$

$$y_B = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{PaL^2}{2EI} = 0$$

$$\frac{a}{L} = \frac{Z}{3}$$

۸۰. گزینه ۴ درست است.



$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_B = F_C$$

$$\rightarrow k\delta_B = 2k\delta_C \rightarrow \delta_B = 2\delta_C$$

$$\sum M = 0 \rightarrow P_{cr} \times 4a\theta = F_B \times 2a$$

$$F_B = k\delta_B = k\left(\frac{4a}{3}\theta\right)$$

$$\rightarrow P_{cr} \times 4a\theta = k\left(\frac{4a}{3}\theta\right) \times 2a \rightarrow P_{cr} = \frac{2\alpha k}{3}$$

۸۱. گزینه ۴ درست است.

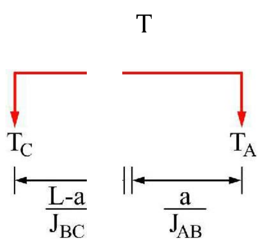
در جداره داخلی دیسک دوار تنش شعاعی صفر، تنش محیطی ماکزیمم و در جداره خارجی دیسک دوار تنش شعاعی صفر و تنش محیطی مینیمم است.

۸۲. گزینه ۱ درست است.

$$\frac{T_A a \quad T_C(L-a)}{J_{AB} \quad\quad J_{BC}}$$

$$\xrightarrow{T_A = T_C} \frac{a}{J_{AB}} = \frac{L-a}{J_{BC}}$$

$$\rightarrow \frac{a}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{L-a}{\frac{\pi(2d)^4}{32}}$$

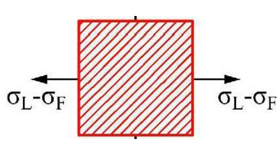


$$\rightarrow a = \frac{L-a}{2^4} \rightarrow \frac{a}{L} = \frac{1}{17}$$

۸۳. گزینه ۳ درست است.

$$\sigma_L - \sigma_F = -\sigma_\theta$$

$$\frac{Pr}{2t} - \frac{F}{2\pi rt} = -\frac{Pr}{t} \rightarrow F = 3Pr^2\pi$$



۸۴. گزینه ۱ درست است.

$$k_1 - \frac{Gd^4}{8D^3N_a}$$

$$k_2 = \frac{Gd^4}{8(2D)^3\frac{Na}{2}}$$

۸۵. گزینه ۳ درست است.

۸۶. فاقد گزینه صحیح می‌باشد.

$$\sigma_a = 75\text{MPa}$$
$$\tau_m = 300\text{MPa} \rightarrow \sigma_m = \sqrt{3}\,\tau_m = 300\sqrt{3}$$

برای طراحی استاتیکی:

$$n_f = \frac{S_y}{\sigma_a + \sigma_m} \quad \frac{800}{75 + 300\sqrt{3}} > 1$$

برای طراحی خستگی طبق محافظه کارانه‌ترین تئوری:

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_y} = \frac{1}{n_f} \rightarrow \frac{75}{200} + \frac{300\sqrt{3}}{800} = \frac{1}{n_f} \rightarrow n_f < 1 \rightarrow N = \text{محدود}$$

$$\sigma'_a = \frac{\sigma_a}{1 - \frac{\sigma_m}{S_y}} \quad \frac{75}{1 - \frac{300\sqrt{3}}{800}} \simeq 214$$

$$\begin{aligned} \sigma_{a1} &= AN_1^B \\ \sigma_{a2} &= AN_2^B \end{aligned} \rightarrow \frac{\sigma_{a1}}{\sigma_{a2}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^B \rightarrow B = \frac{\log \frac{\sigma_{a1}}{\sigma_{a2}}}{\log \frac{N_1}{N_2}}$$

$$\rightarrow A = \frac{\sigma_{a1}}{N_1^B}$$

$$B = \frac{\log 2}{\log 10^{-3}} = -0.1 \rightarrow A = \frac{400}{1000^{-0.1}} = 800$$

$$214 = 800N^{-0.1}$$

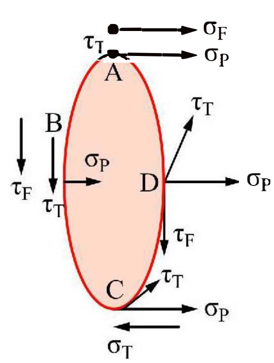
$N = 533042$ سیکل

۸۷. گزینه ۳ درست است.

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \left(\frac{R}{C}\right)^2 \frac{\mu n}{P_1}\ ,\ P_1 = \frac{W}{LD} \\ S_2 &= \left(\frac{R}{C}\right)^2 \frac{\mu_2 n}{2P_1}\ ,\ P_2 = \frac{2w}{LD} = 2P_1 \end{aligned}\right| \rightarrow S_1 = S_2$$

۸۸. گزینه ۲ درست است.

در مقطع گیردار تیر، نقطه A بحرانی‌ترین است:



$$\sigma_A = \sigma_F + \sigma_P = \frac{MC}{I} + \frac{P}{A}$$

$$\sigma_A = \frac{100 \times 550 \times 10}{\frac{\pi 20^4}{64}} + \frac{8 \times 10^3}{\frac{\pi 20^2}{4}} = 95.5\text{MPa}$$

$$\tau_A = \tau_T = \frac{Tr}{J} = \frac{30 \times 10^3 \times 10}{\frac{\pi 20^4}{32}} = 19\text{MPa}$$

$$n_{von} = \frac{S_y}{\sigma_e} = \frac{280}{\sqrt{95.5^2 + 3(19)^2}} = \frac{280}{101} = 2.77$$

۸۹.گزینه ۲ درست است.

$$T_{(N.m)} = \frac{9550P(kw)}{N(rpm)} = \frac{9550\times 50\times \pi\times 10^{-3}}{300} = 5\,N\,m$$

$$F_t\frac{d}{2} = T \rightarrow F_t = \frac{2T}{d} = \frac{2\times 5\times 10^{3}}{100} = 100N \rightarrow F_a = F_t\tan\Psi = 100\tan 45 = 100$$

جهت نیروی مذکور در چرخدنده راننده به سمت $-x$ است.

۹۰. گزینه ۱ درست است.

با افزایش μ عدد سامرفیلد افزایش می‌یابد و در $\frac{L}{D}$ ثابت، $\frac{P}{p_{max}}$ افزایش و لذا P_{max} کاهش می‌یابد.

۹۱. گزینه ۱ درست است.

$$\rho = \frac{1}{k} \quad \text{شعاع‌ای} \quad , \quad k = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{\left(r^2 + r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = \frac{k^2\theta^2 + 2k^2 - 0}{\left(k^2\theta^2 + k^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r^2 + 2k^2}{\left(r^2 + k^2\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{r^2 + 2k^2}{\left(r^2 + k^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

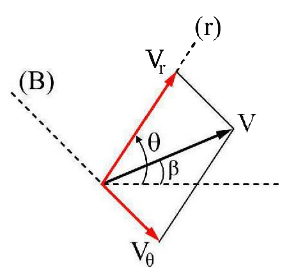
$$\sum F_n = \frac{mV^2}{\rho} = mV^2\left(\frac{r^2 + 2k^2}{\left(r^2 + k^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

۹۲. گزینه ۴ درست است.

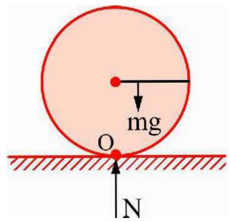
$$\vec{V} = V_r\hat{e}_r + V_\theta\hat{e}_\theta = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

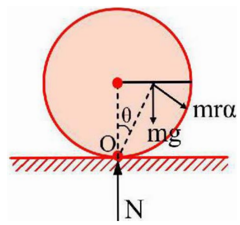
$$\vec{V} = |V|\cos(\theta - \beta)\hat{e}_r + |V|\sin(\theta - \beta)\hat{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{r} = V\cos(\theta - \beta)}$$



۹۳. گزینه ۲ درست است.





$$\sum M_0 = I\ddot{\theta} \Rightarrow Mg\frac{L}{2} = I_0\ddot{\theta}$$

$$I_0 = \frac{1}{12}ML^2 + m\left(L^2 + \frac{L^2}{4}\right) = \frac{16}{12}ML^2 = \frac{4}{3}ML^2$$

$$\Rightarrow mg\frac{L}{2} = \frac{4}{3}mL^2\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\frac{gL}{2}}{\frac{4}{3}L^2} = \frac{3g}{8L}$$

$$\sum F_y = -mr\alpha\cos(90-\theta) = mr\alpha\sin\theta$$

$$N - mg = -m\left(\sqrt{L^2 + \frac{L^2}{4}}\right) \times \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{L^2 + \frac{L^2}{4}}} \times \frac{3g}{8L}$$

$$N = mg - \frac{mg}{16} = \boxed{\frac{13}{16}mg}$$

۹۴. گزینه ۴ درست است.

$$E_A + W_{A-B} = E_B \quad ①$$

$$E_A = mgh_A = 2\times9.8\times0.5 = 9.8 \quad ②$$

$$\begin{cases} W_{A-B} = \vec{F}.(AB) \\ AB = B - A = (0,0.8,0) - (0.6,0,0.5) = (-0.6,0.8,-0.5) \end{cases}$$

$$W_{A-B} = (-15,10,15).(-0.6,0.8,-0.5) = 15\times0.6 + 10\times0.8 - 15\times0.5 \qquad \boxed{W_{A-B} = 9.5}$$

$$E_B = \frac{1}{2}MV_B^2 = \frac{1}{2}\times2\times V_B^2 = V_B^2$$

$$①,②,③,④ \Rightarrow 9.8 + 9.5 = V_B^2 \Rightarrow V_B = \sqrt{19.3} = 4.39$$

۹۵. گزینه ۳ درست است.

تکانه خطی در سیستم نشان داده شده ثابت است:

$$D_1 = D_2 \Rightarrow 0 = m_1v_1 + m_2v_2 \Rightarrow mv_1 + 6mv_2 = 0 \Rightarrow \boxed{v_1 = -6v_2}$$

قانون پایستگی انرژی:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow mgL = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \Rightarrow mgL = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}6mv_2^2$$

$$\Rightarrow v_1^2 + 6v_2^2 = 2gL \Rightarrow 36v_2^2 + 6v_2^2 = 2gL \Rightarrow 42v_2^2 = 2gL \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{gL}{21}}$$

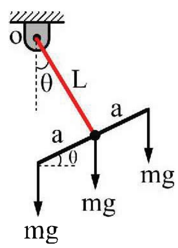
$$v_1 = -6v_2 = -6\sqrt{\frac{gL}{21}}$$

$$v_{\frac{2}{1}} = v_2 - v_1 = \sqrt{\frac{gL}{21}} + 6\sqrt{\frac{gL}{21}} = 7\sqrt{\frac{gL}{21}}$$

۹۶. گزینه ۴ درست است.

فرکانس طبیعی سیستم جرم و فنر اضافه شده باید با فرکانس تحریک سیستم برابر باشد. چون فرکانس تحریک $10\frac{rad}{s}$ است، بنابراین باید $\sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = 10$ باشد بنابراین یا گزینه 3 یا 4 صحیح است. برای کاهش ارتعاشات با روش افزودن جرم باید جرم اضافه شده تا حد ممکن از جرم سیستم اصلی کمتر باشد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۹۷. گزینه ۱ درست است.



$$\sum M_0 = I\ddot{\theta}$$

$$-mg(L\sin\theta) - mg(L\sin\theta + a\cos\theta) - mg(L\sin\theta - a\cos\theta)$$

$$= \left(mL^2 + m\left(L^2 + a^2\right) + m\left(L^2 + a^2\right)\right)\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad m\left(3L^2 + 2a^2\right)\ddot{\theta} + 3mgL\sin\theta = 0$$

$$\theta \ll 6^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin\theta \approx \theta \quad \Rightarrow \quad m\left(3L^2 + 2a^2\right)\ddot{\theta} + 3mgL\,\theta = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} m^* = m\left(3L^2 + 2a^2\right) \\ k^* = 3mgL \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \omega_n^2 = \frac{k^*}{m^*} \quad \frac{3mgL}{m\left(3L^2 + 2a^2\right)} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{3gL}{3L^2 + 2a^2}}$$

۹۸. گزینه ۳ درست است.

$$F(t) = F_0\left(u(t) - u(t - t_1)\right)$$

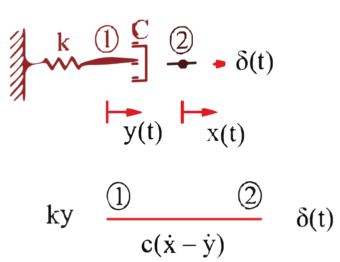
$$m\ddot{x} + kx = u(t - t_0) \xrightarrow{\text{پاسخ}} x(t) = \frac{1}{mw_n^2}\left(1 - \cos\omega_n(t - t_0)\right)$$

$$m\ddot{x} + 4kx = F_0\left(u(t) - u(t - t_1)\right) \quad \rightarrow \quad \omega_n^2 = \frac{4k}{m}$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{1}{m \times \frac{4k}{m}} \times F_0\left(1 - \cos\omega_n t - \left(1 - \cos\omega_n(t - t_1)\right)\right)$$

$$= \frac{F_0}{4k}\left(\cos\left(\omega_n(t - t_1)\right) - \cos\omega_n t\right)$$

۹۹. گزینه ۱ درست است.



$$\begin{cases} \sum F_1 = m_1\ddot{y} \\ \sum F_2 = m_2\ddot{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(\dot{x} - \dot{y}) - ky = 0 \\ \delta(t) - \left((\dot{x} - \dot{y})\right) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{Laplace}}\begin{cases} cs(x-y)-ky=0 & ① \\ 1-cs(x-y)=0 & ② \end{cases}$$

$$① \qquad y=\frac{cs}{cs+k}x$$

$$② \rightarrow cs\left(x-\frac{cs}{cs+k}x\right)=1 \Rightarrow cs\times\left(\frac{k}{cs+k}\right)=1$$

$$\Rightarrow x_{(s)}=\frac{cs+k}{csk}=\frac{1}{k}+\frac{1}{cs} \Rightarrow x(t)=L^{-1}\left[x_{(s)}\right]=\frac{1}{k}\delta(t)+\frac{1}{c}u(t)$$

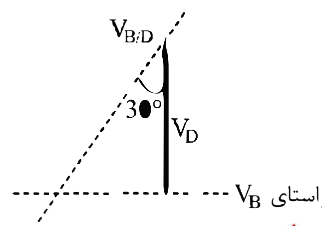
۱۰۰. گزینه ۱ درست است.

$$Ln\frac{A_1}{A_2}=L_n\frac{A_2}{A_3} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{A_2}{A_3} \Rightarrow \frac{2.5}{\quad}=\frac{\quad}{A_3}$$

$$\Rightarrow A_3=\frac{1}{2.5}=0.4$$

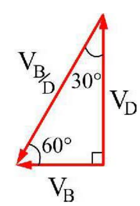
۱۰۱. گزینه ۲ درست است.

حل به روش ترسیمی



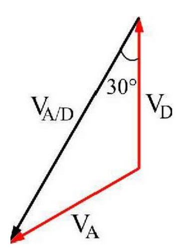
$$\underset{V_B}{\xrightarrow{\times\checkmark}} \quad \underset{V_D}{\xrightarrow{\checkmark\checkmark}} + \underset{V_{\frac{B}{D}}}{\xrightarrow{\times\checkmark}}$$

قانون سینوس‌ها: $\dfrac{\cancel{V_D}^{\,1.2}}{\sin 60}=\dfrac{V_B}{\sin 30}=\dfrac{V_{\frac{B}{D}}}{\sin 90}$



$$V_B=1.2\frac{\sin 30}{\sin 60}=1.2\times\frac{\sin 30}{\sin 60}=1.2\ \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$V_{\frac{B}{D}}=1.2\frac{\sin 90}{\sin 60}=\frac{1.2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2.4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left|V_B\right|=|BD|\dot\theta_{AD} \Rightarrow \theta_{AD}=\frac{\frac{2.4}{\sqrt{3}}}{0.3}=\frac{8}{\sqrt{3}}$$



$$\vec{V}_A=\vec{V}_D+\vec{V}_{\frac{A}{D}}=1.2\hat{j}+|AD|\dot\theta_{AD}(-\sin 30\,i-\cos 30\,j)$$

$$=1.2\,j+0.5\times\frac{8}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)=\frac{-2}{\sqrt{3}}\hat{i}-0.8\,j$$

$$\left|V_A\right|=\sqrt{\frac{4}{3}+0.64}\simeq\boxed{1.4}$$

۱۰۲. گزینه ۲ درست است.

در حالت کلی داریم:

$$a_{B_4} = a^n_{B_2} + a^t_{B_2} + a^n_{\frac{B_4}{B_2}} + a^t_{\frac{B_4}{B_2}} + a^c_{\frac{B_4}{B_2}}$$

چون: $r_{\frac{B_4}{B_2}} = 0$ بنابراین $a^n_{\frac{B_4}{B_2}} = r_{\frac{B_4}{B_2}}\dot{\theta}^2 = 0$, $a^t_{\frac{B_4}{B_2}} = r_{\frac{B_4}{B_2}}\ddot{\theta} = 0$ بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۱۰۳. گزینه ۴ درست است.

نقطه B و C تنها در راستای x حرکت دارند بنابراین $V_{\frac{B}{C}} = 0$ یعنی لینک 2 دوران ندارد بنابراین $V_D = 0$ یعنی نقطه D نیز در صفحه افقی حرکت می‌کند. بنابراین $V_B = V_C = V_{D_2} = V_B$

۱۰۴. گزینه ۲ درست است.

دایره مبنا کوچکترین دایره‌ای است که بر سطح لبه بادامک مماس و یا بر قسمتی از منحنی آن منطبق باشد و اندازه آن تعیین کننده اندازه بادامک است.

با توجه به شکل به وضوح شعاع کوچک‌ترین دایره مماس برابر است با:

$R_2 + R_3 - e$

۱۰۵. گزینه ۱ درست است.

$P \rightarrow$ پینیون و $R \rightarrow$ روتور

$$T - F\times 0.05 = I_P\ddot{\theta}_P \Rightarrow 10 - 0.05F = (0.05+0.15)\ddot{\theta}_P \Rightarrow 0.05F = 10 - 0.2\dot{\theta}_P \quad ①$$

$$F\times 0.25 = I_R\ddot{\theta}_R \Rightarrow 0.25F = (4+0.02+0.98)\ddot{\theta}_R \Rightarrow 0.25F = 5\ddot{\theta}_R \quad ②$$

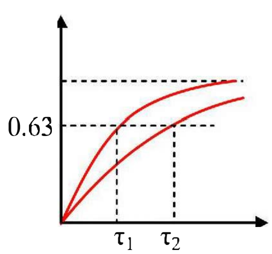
$$\frac{\ddot{\theta}_R}{\ddot{\theta}_P} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \Rightarrow \ddot{\theta}_P = 5\ddot{\theta}_R \quad ③$$

$$①,② \Rightarrow 5(10 - 0.2\ddot{\theta}_P) \Rightarrow 10 - 0.2\ddot{\theta}_P = \ddot{\theta}_R$$

$$③ \rightarrow 10 - 0.2\times 5\ddot{\theta}_R = \ddot{\theta}_R \Rightarrow 10 = 2\ddot{\theta}_R \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}_R = 5}$$

۱۰۶. گزینه ۲ درست است.

$\tau_1 \ll \tau_2$



Step respons

با توجه به آنکه در پاسخ به ورودی پله پس از گذشت یک ثابت زمانی به %0.63 پاسخ نهایی می‌رسد بنابراین سیستم با ثابت زمانی کمتر زودتر به این مقدار می‌رسد.

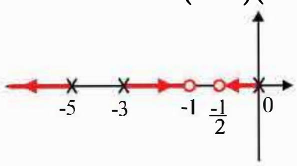
با توجه به آنکه زمان نشست برای خطای ٪5، 3τ می‌باشد با توجه به زمان رسیدن بـه حالـت مانـدگار سیسـتم را مـی‌تـوان بـا مقایسه پاسخ‌های زمانی در سیستم تشخیص داد.

۱۰۷. سوال غلط است.

با توجه به قطب‌ها و صفرهای سیستم در مکان هندسی ریشه‌ها داریم:

مکان هندسی ریشه‌های این سیستم به شکل زیر خواهد بود.

$$G(s)H(s)=k\frac{(S+1)\left(S+\frac{1}{2}\right)}{S(S+3)(S+5)} \rightarrow$$



اگر منظور تابع تبدیل ① باشد:

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{SR(s)}{1+G(s)H(s)}\xrightarrow[R(s)=\frac{1}{S}]{\text{ورودی پله}} e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{S\times\frac{1}{S}}{1+\frac{k(S+1)(S+0.5)}{S(S+3)(S+5)}}=0$$

$$\xrightarrow[\text{ورودی سرعت}]{R(s)=\frac{1}{S^2}} e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{S\times\frac{1}{S^2}}{1+\frac{k(S+1)(S+0.5)}{S(S+3)(S+5)}}=\frac{1}{\frac{K(0.5)}{15}}=\frac{30}{k}$$

نمودار رسم شده در صورت سوال شبیه به سیستم ② است.

$$G(s)H(s)=k\frac{(S+1)\left(S+\frac{1}{2}\right)}{(S+3)(S+5)} \quad ②$$

که در آن قطب $S=0$ در نظر گرفته نشده است.

۱۰۸. گزینه ۴ درست است.

$$① \quad U-Q_1-Q_3=SH_1 \Rightarrow U=(S+1)Q_1+Q_3$$

$$② \quad Q_3-Q_2=SH_2 \Rightarrow Q_3=(S+1)Q_2=(S+1)(Q_1-Q_3) \Rightarrow Q_1=\frac{S+2}{S+1}Q$$

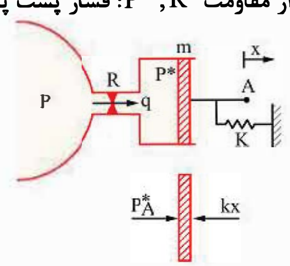
$$H_1=Q_1 \quad , \quad H_2=Q_2 \quad , \quad H_1-H_2=Q_3 \Rightarrow Q_1-Q_2=Q_3 \Rightarrow Q_2=Q_1-Q_3$$

$$\Rightarrow U=(S+2)Q_3+Q_3=(S+3)Q_3 \Rightarrow \frac{Q_3}{u}=\frac{1}{S+3}$$

۱۰۹. گزینه ۲ درست است.

q:دبی عبوری از مقاومت R، P^*: فشار پشت پیستون

$$\begin{cases} P-P^*=Rq & ① \\ q=A\dot{x} & ② \\ P^*A-kx=m\ddot{x} & ③ \end{cases}$$



$$①,② \Rightarrow P-P^{*}=RA\dot{x} \Rightarrow P-P^{*}=RASX \Rightarrow P^{*}=P-RASX$$

$$③ \Rightarrow (P-RASx)A-kx=mS^{2}X \Rightarrow PA=\left(ms^{2}+RA^{2}S+k\right)\times$$

$$\Rightarrow \frac{X}{P}-\frac{A}{mS^{2}+RA^{2}S+k}$$

۱۱۰. گزینه ۴ درست است.

$$e_{ss}=0 \Rightarrow \lim_{s\to 0}\frac{S\times\frac{1}{S}}{1+G(s)(1+2s)}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to 0}G(s)(1+2S)=\infty \Rightarrow \lim_{s\to 0}G(s)=\infty \Rightarrow$$ گزینه ۴