کد کنترل

130

F

130F

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

صبح پنج‌شنبه
۹۷/۲/۶

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی‌ارشد ناپیوستهٔ داخل ـ سال ۱۳۹۷

آمار ـ کد (۱۲۰۷)

تعداد سؤال: ۱۲۵

مدت پاسخگویی: ۲۵۵ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شمارهٔ سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شمارهٔ	تا شمارهٔ
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۳۵	۳۱	۶۵
۳	دروس تخصصی (احتمال، آمار ریاضی، نمونه‌گیری و رگرسیون ۱)	۶۰	۶۶	۱۲۵

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به‌منزلهٔ عدم حضور شما در جلسهٔ آزمون است.

اینجانب ..... با شمارهٔ داوطلبی ..... در جلسهٔ این آزمون شرکت می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

***Directions:** Choose the word or the phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then mark the correct choice on your answer sheet.*

1- **Fierce winds and deadly waves were only one ---------- many explorers like Christopher Columbus confronted when sailing to unknown lands.**
1) suspension 2) obstacle 3) shortage 4) variation

2- **In urban desert areas potable water supplies are stressed by increasing demands that leave water managers ---------- to find new supplies.**
1) discouraging 2) refusing 3) invading 4) struggling

3- **The sense of smell diminishes with advancing age—much more so than the sensitivity to taste. This ---------- may result from an accumulated loss of sensory cells in the nose.**
1) decrease 2) merit 3) ambiguity 4) defense

4- **True, all economic activities have environmental consequences. Nevertheless, the goal of shrimp producers should be to reduce the ---------- effects on the environment as much as possible.**
1) indigenous 2) competitive 3) deleterious 4) imaginary

5- **Like most successful politicians, she is pertinacious and single-minded in the ---------- of her goals.**
1) pursuit 2) discipline 3) permanence 4) involvement

6- **Knowing that everyone would ---------- after graduation, she was worried that she would not see her friends anymore.**
1) emerge 2) conflict 3) differentiate 4) diverge

7- **Certain mental functions slow down with age, but the brain ---------- in ways that can keep seniors just as sharp as youngsters.**
1) composes 2) conveys 3) compensates 4) corrodes

8- **It is argued by some that hypnosis is an effective intervention for ---------- pain from cancer and other chronic conditions.**
1) displacing 2) alleviating 3) exploring 4) hiding

9- **Children who get ---------- atmosphere at home for studies perform better than students who are brought up under tense and indifferent family atmosphere.**
1) favorable 2) valid 3) obedient 4) traditional

10- The post office has promised to resume first class mail ---------- to the area on Friday.
1) attention 2) progress 3) expression 4) delivery

PART B: Cloze Passage
Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Colette began painting while she was still in her youth. (11) ---------- 1970, she completed her first performance with *Hommage a Delacroix*, (12) ---------- was the beginning of an artistic career (13) ---------- to the oneness of art and life. (14) ----------, actions and performances on streets and public squares, followed by her "living environments" and the "windows", (15) ---------- in a selected pose with an elaborate arrangement of fabrics and lace.

11- 1) Since the year 2) During a year of
3) For a year of 4) In the year
12- 1) that it 2) which 3) that 4) it
13- 1) devoted 2) was devoted 3) to devote 4) devoting
14- 1) Street works then came 2) Then came street works
3) There coming then street works with 4) With street works then to come
15- 1) she remained motionless 2) that in there she remained motionless
3) in which she remained motionless 4) that in it motionless she remained

PART C: Reading Comprehension:
Directions: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

PASSAGE 1:

Edwin James George Pitman was educated at the University of Melbourne, graduating with B.Sc. and M.A. degrees. He was acting professor of mathematics at the University of New Zealand 1922-1923, then tutor in mathematics and physics at residential colleges of the University of Melbourne 1924-1925. In 1926 he was appointed professor of mathematics at the University of Tasmania, a position he held until his retirement at the end of 1962.

As part of his duties at the University of Tasmania, Pitman was required to offer a course in statistics. He was also consulted by experimentalists of the Tasmanian Department of Agriculture about the analysis of their data. These circumstances led to his studying the then new statistical methods and ideas being developed by R. A. Fisher. As Fisher's ideas were not then widely understood, Pitman set about mastering his work, in particular, *Statistical Methods for Research Workers*.

Pitman became interested in testing hypotheses about means without any accompanying specification of form of population distributions. He examined the non null distribution of the test statistic for what would now be called the permutation test,

first for the test of equality of two means, and then for tests of several means (analysis of variance) and of correlation. The results are given in three papers.

This work on distribution-free methods culminated in the lecture notes developed during a visit to the United States in 1948 and 1949. These notes, produced for the lectures given at the University of North Carolina, were never published but were widely circulated in mimeographed form. They were frequently cited and undoubtedly provided a starting point for much subsequent work in this field.

However, Pitman's first published papers dealt with basic theoretical questions arising from the work of R. A. Fisher. His first paper not only discussed the applicability of the concept of intrinsic accuracy but also established the result that families of distributions admitting a nontrivial sufficient statistic are of exponential type.

16- Pitman received his M.A. degree ----------.

1) from the University of Melbourne 2) from New Zealand
3) in 1922 4) in 1923

17- He offered a course in statistics in ----------.

1) Melbourne 2) New Zealand 3) Tasmania 4) London

18- He retired ----------.

1) in 1962 2) in Melbourne 3) in New Zealand 4) in 1960

19- Pitman became interested in ----------.

1) regression 2) permutation test
3) probability 4) combinatorics

20- His first paper discussed ----------.

1) independence 2) complete statistics
3) correlation 4) exponential family

PASSAGE 2:

W. S. Gusset entered the service of the Guinness brewery business in Dublin Ireland, in 1899, after obtaining a degree in chemistry at Oxford, with a minor in mathematics. He was asked to investigate what relations existed between the quality of materials such as barley and hops, production conditions, and the finished product. These practical problems led him to seek exact error probabilities of statistics from small samples, a hitherto unresearched area. His firm, which would later require him to write under the pseudonym "Student," arranged for him to spend the academic year 1906-1907 studying under Karl Pearson at the Biometric Laboratory in University College, London. From Pearson, Gosset learned the theory of correlation and the Pearson system of frequency curves, both of which helped him in developing statistical techniques to analyze small-sample data.

"The study of the exact distributions of statistics commences in 1908 with Student's paper *The Probable Error of a Mean*" wrote R. A. Fisher in this famous paper which came from his period at the Biometric Laboratory:

1. Gosset conjectured correctly the distribution of the sample variance s^2 in a normal sample.

2. Unaware of work by Abbe and Helmert, he proved that s^2 and the mean $\bar{x}$ of such a sample are uncorrelated and conjectured correctly that they are independent.

3. In essence he derived the *t*-distribution named after him, as a Pearson type VII frequency curve.

21- Gusset ("Student") received a degree in chemistry ----------.
1) at Oxford 2) in 1900 3) in Canada 4) in Australia

22- The word "pseudonym" in paragraph 1 means
1) first name 2) family name 3) real name 4) false name

23- What was Gusset's pseudonym?
1) William 2) Sealy 3) Student 4) Teacher

24- He studied under ----------.
1) Fisher 2) K. Pearson 3) Helmert 4) J. Pearson

25- He introduced ----------.
1) Cauchy distribution 2) Gamma distribution
3) *t*-distribution 4) exponential distribution

PASSAGE 3:

In mathematical analysis and in probability theory, a σ-algebra (sigma field) on a set X is a collection of subsets of X that is closed under a countable-fold set operations (complement, union of countably many sets and intersection of countably many sets).

By contrast, an algebra is only required to be closed under finitary set operations. That is a σ-algebra is an algebra of sets, completed to include countably infinite operations. The pair (X , F) is called measure space and elements of F are named measurable sets. On the other hand, x is called sample space and every element of sigma-field is called an event.

26- The sets of all measurable sets would be ----------.
1) X 2) (X , F) 3) (X , F , μ) 4) a sigma-field

27- An algebra ----------.
1) is the sama σ-field
2) is closed under finite conditions of set operations
3) measures space
4) is a measurable set

28- A measurable set is ----------.
1) a subset of X which belongs to F 2) X
3) $\Im$ 4) (X, $\Im$)

29- An algebra is closed under ----------.
1) additivity
2) countable-field set operation
3) complement, union and intersection of sets
4) countable additively

30- The word "event" in the last sentence means a ----------.
1) measure space 2) measure
3) measurable space 4) measurable set

دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۳۱- اگر f تابعی فرد باشد و $\lim_{x\to 0^+} f(x) = a$ ، آنگاه مقدار $\lim_{x\to 0^-}\left(f(-xe^{-x}) + f(x^3 - x^5) + f(x^4 - x^2)\right)$ کدام است؟

۱) a

۲) $-3a$

۳) $-a$

۴) $3a$

۳۲- کدام سری همگرا است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n + e^n}$

۳۳- اگر تابع f در معادلهٔ $\cos(f(x)) + \frac{8}{\pi^3}(f(x))^3 + 2f(x) = 1 + x$ صدق کند، آنگاه مقدار $2f'(0) + f'(\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{\pi + 6}$

۲) $\frac{\pi + 6}{2\pi + 6}$

۳) $\frac{\pi + 6}{\pi}$

۴) $\frac{2\pi + 6}{\pi + 6}$

۳۴- اگر $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n + n^2)x^n$ ، آنگاه $f(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۱

۳۵- مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ و محور xها در بازه $\left[1, e^2\right]$ کدام است؟

۱) ۵

۲) ۴

۳) ۳

۴) ۲

۳۶- طول منحنی $f(x) = \int_1^x \sqrt{t^4 - 1}\, dt$ در بازهٔ $[1,3]$ کدام است؟

۱) $\frac{19}{3}$

۲) $\frac{25}{3}$

۳) $\frac{26}{3}$

۴) $\frac{28}{3}$

۳۷- کوتاه‌ترین فاصله بیضی به معادلهٔ $x^2 + xy + y^2 = 12$ تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$

۲) $2\sqrt{6}$

۳) ۴

۴) $2\sqrt{2}$

۳۸- مقدار $\int_0^1 \int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} dy dx$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2} - 1$

۲) $2\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{2}$

۴) $1 + \sqrt{2}$

۳۹- حجم جسم محصور به استوانه $x^2 + z^2 = 9$ و صفحات $x - y + z + 4 = 0$ و $x - y + z = 0$ کدام است؟

۱) 72π

۲) 36π

۳) 18π

۴) 9π

۴۰- اگر C منحنی فصل مشترک رویه‌های $x+y=2a$ و $x^2+y^2+z^2-2ax-2ay=0$ در جهت راستگرد، مقدار $\oint_C ydx+zdy+xdz$ کدام است؟

۱) $-2\sqrt{2}\pi a^2$

۲) $-\sqrt{2}\pi a^2$

۳) $\sqrt{2}\pi a^2$

۴) $2\sqrt{2}\pi a^2$

۴۱- فرض کنید $f:X\to Y$ تابع باشد و $A\subseteq X$ و $B\subseteq Y$. کدام گزینه درست است؟

۱) $f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B$

۲) $f(A\cup f^{-1}(B))=f(A)\cup B$

۳) $f^{-1}(f(A)\cap B)=A\cap f^{-1}(B)$

۴) $f^{-1}(f(A)\cup B)=A\cup f^{-1}(B)$

۴۲- فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع با خاصیت زیر باشد:

$$\forall A,B\subseteq X\ \left(A\cap B=\phi\Rightarrow f(A)\cap f(B)=\phi\right)$$

کدام گزینه درست است؟

۱) تابع f پوشا است ولی لزوماً یک به یک نیست.

۲) تابع f یک به یک است ولی لزوماً پوشا نیست.

۳) تابع f یک به یک و پوشا است.

۴) تابع f لزوماً یک به یک و پوشا نیست.

۴۳- فرض کنید S، R و T رابطه‌های دوتایی در مجموعه ناتهی A هستند. کدام گزینه درست است؟

۱) $T\circ(R\cap S)=(T\circ R)\cap(T\circ S)$

۲) $T\circ(R-S)=(T\circ R)-(T\circ S)$

۳) $(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$

۴) $(R-S)\circ T=R\circ T-S\circ T$

۴۴- فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، $A\subseteq\mathbb{R}$ و $f:A\to\mathbb{R}$ تابع باشد. فرمول منطقی گزارهٔ زیر کدام گزینه است؟

در گزینه‌های زیر ε و δ مقید به اعداد مثبت، L مقید به اعداد حقیقی و a مقید به اعضای A است.

تابع f در هیچ نقطه‌ای از A حد ندارد.

۱) $\forall a\forall L\,\exists\varepsilon\exists\delta\exists x(x\in A\wedge|x-a|<\delta\wedge|f(x)-L|\geq\varepsilon)$

۲) $\forall a\forall L\,\exists\varepsilon\,\forall\delta\forall x(x\in A\wedge|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|\geq\varepsilon)$

۳) $\forall a\forall L\,\forall\varepsilon\exists\delta\exists x(x\in A\wedge|x-a|<\varepsilon\wedge|f(x)-L|\geq\delta)$

۴) $\forall a\forall L\,\exists\delta\forall\varepsilon\exists x(x\in A\wedge|x-a|<\varepsilon\wedge|f(x)-L|\geq\delta)$

۴۵- فرض کنید $A \prec B$ به این مفهوم است که A با زیر مجموعه‌ای از B هم‌عدد (هم ارز) است ولی B با هیچ زیر مجموعه‌ای از A هم‌عدد (هم ارز) نیست. اگر $B \prec A$، کدام گزینه درست است؟

۱) هیچ تابع پوشایی از B به A وجود ندارد.

۲) هیچ تابع پوشایی از A به B وجود ندارد.

۳) یک تابع یک به یک از B به A وجود دارد.

۴) بین A و B یک تابع یک به یک و پوشا وجود دارد.

۴۶- کدام‌یک از توابع زیر از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$، یک تبدیل خطی است؟

۱) $T_1(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_2)$

۲) $T_2(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 1)$

۳) $T_3(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 - 1, 0)$

۴) $T_4(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_1)$

۴۷- فرض کنید $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$. فضای $V^\perp$ کدام است؟ (منظور از $V^\perp$، فضای متعامد V در $\mathbb{R}^4$ است.)

۱) $\{(a, 2a, b, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$

۲) $\{(a, 2a, a, a) | a \in \mathbb{R}\}$

۳) $\{(a, 2a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$

۴) $\{(a, 2b, c, d) | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

۴۸- فرض کنید $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ که در هر سطر A، دقیقاً یک عنصر ناصفر وجود دارد و

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ (10)^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

دراین‌صورت کدام‌یک از اعداد زیر، مقدار ویژهٔ A است؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۱۰

۴) 10^{10}

۴۹- فرض کنید A ماتریسی 8×8 با درایه‌های ۱ و ۱- باشد که هر دو سطر آن برهم عمودند. دراین‌صورت قدرمطلق $\det(A)$ کدام است؟

۱) ۸

۲) 8^2

۳) 8^3

۴) 8^4

۵۰- اگر $A\in M_{10}(\mathbb{R})$ و $rank(A)\le 8$ باشد، آنگاه $rank(adj(A))$ کدام است؟

۱) ۰

۲) ۲

۳) ۸

۴) ۱۰

۵۱- اگر F و E زیرمجموعه‌های ناتهی و کران‌دار $\mathbb{R}$ باشند، $E+F=\{x+y : x\in E, y\in F\}$ و $EF=\{xy : x\in E, y\in F\}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $\sup(E+F)=\sup E+\sup F$

۲) $\sup(EF)=\sup E\cdot\sup F$

۳) اگر $E\cap F\neq\phi$ آنگاه $\sup(EUF)=\sup E+\sup F-\sup(E\cap F)$

۴) اگر $E\cap F\neq\phi$ آنگاه $\sup(E\cap F)=\sup E\cdot\sup F$

۵۲- اگر $\lim_n a_n=0$ و برای هر $n\ge 1$، $a_n-a_{n+1}\ge\frac{1}{n(n+1)}$، کدام گزینه درست است؟

۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|}$ همگرا است.

۲) برای هر n، $a_n\ge\frac{1}{n}$

۳) سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا است.

۴) برای هر n، $a_n\le\frac{1}{n}$

۵۳- کدام گزینه نادرست است؟

۱) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ موجود است که تنها در یک نقطهٔ مشتق‌پذیر است.

۲) اگر تابع $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ دارای مشتق کراندار باشد، دنباله $\{f(\frac{1}{n})\}$ همگرا است.

۳) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ موجود است که تنها در اعداد اصم پیوسته است.

۴) تابع مشتق‌پذیر $f:[0,7]\to\mathbb{R}$ موجود است که $f'(x)=[x](0\le x\le 7)$.

۵۴- فرض کنید $f(x)=\begin{cases}x^3 & x\text{ گویا}\\ 0 & x\text{ اصم}\end{cases}$ و $a=\overline{\int_0^1}f(x)dx$ و $b=\underline{\int_0^1}f(x)dx$ به‌ترتیب انتگرال ریمان بالایی و پایینی f باشند. کدام گزینه درست است؟

۱) $a=b=0$

۲) $a=\frac{1}{4}$ ، $b=0$

۳) $a=b=\frac{1}{4}$

۴) $a=\frac{1}{4}$ ، $b=\frac{1}{5}$

۵۵- کدام گزینه نادرست است؟

۱) مجموع هر دو تابع پیوسته یکنواخت، پیوسته یکنواخت است.

۲) اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مشتق کراندار داشته باشد، پیوسته یکنواخت است.

۳) حاصل‌ضرب هر دو تابع پیوسته یکنواخت، پیوسته یکنواخت است.

۴) اگر f در بازهٔ $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد آنگاه تابع $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته یکنواخت است.

۵۶- فرض کنید یک دستگاه معادلات خطی با روش حذفی گاوس و محورگزینی سطری در یک کامپیوتر با روند عدد یک برای نمایش اعداد حقیقی برابر با 10^{-14}، حل شود. اگر عدد حالت ماتریس ضرایب دستگاه برابر با 10^{14} باشد، آن‌گاه تعداد رقم‌های ده‌دهی قابل اعتماد در جواب به دست آمده حداکثر کدام است؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۱۳

۴) ۱۵

۵۷- برای اینکه قاعدهٔ انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای برای محاسبه $\int_0^1 (x^5-cx^4)dx$ دقیق باشد، مقدار c کدام است؟

۱) $\frac{1}{18}$

۲) $\frac{3}{10}$

۳) $\frac{1}{30}$

۴) $\frac{10}{9}$

۵۸- اگر روش نیوتن برای حل مسئله $x^2-2\sin^2 x=0$ به یک عدد مثبت x همگرا شود، آن‌گاه نرخ همگرایی مجانبی کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) p و $1<p<2$

۵۹- تابع $f(x)=2\sin 3x+3\sin 2x+x^2$ روی بازهٔ $[0,\pi]$ را با چه طول گام h باید جدول‌بندی کرد تا خطای حاصل از درون‌یابی تکه‌ای خطی از 10^{-6} بیشتر نشود؟

۱) ۰/۰۰۳

۲) ۰/۰۰۵

۳) ۰/۰۰۰۳

۴) ۰/۰۰۰۵

۶۰- دنبالهٔ حاصل از تکرار نقطهٔ ثابت به‌صورت $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ، $n = ۰,۱,۲,...$ که $\varphi(x) = ۳x + Bx^۲ + Cx^۳$ را در نظر بگیرید. ضرایب B و C چگونه باشند که تکرارها به‌صورت موضعی به $\frac{۱}{\alpha}$ با مرتبه همگرایی دست کم ۳، همگرا شوند؟ (α عدد مثبت است)

۱) $B = ۳\alpha^۲$ ، $C = ۳$

۲) $B = ۳\alpha$ ، $C = \alpha^۲$

۳) $B = -۳\alpha$ ، $C = \alpha^۲$

۴) $B = ۳$ ، $C = ۳\alpha$

۶۱- به چند طریق می‌توان ۲۰ ورزشکار را به ۵ گروه دو نفره و ۲ گروه پنج نفره تقسیم نمود؟

۱) $\frac{۲۰!}{(۲!)^۴(۵!)}$

۲) $\frac{۲۰!}{(۲!)^۵(۵!)^۲}$

۳) $\frac{۲۰!}{(۲!)^۶(۵!)^۳}$

۴) $\frac{۲۰!}{(۲!)^۵(۵!)^۲ ۷!}$

۶۲- اگر جمع میانگین و میانه یک نمونه تصادفی ۱۲تایی برابر ۲۲ و بزرگ‌ترین یافته نمونه برابر ۱۷ باشد، جمع میانگین و میانه وقتی که بزرگ‌ترین یافته نمونه با ۲۳ جایگزین شود، کدام است؟

۱) ۲۲٫۵

۲) ۲۳

۳) ۲۳٫۵

۴) ۲۴

۶۳- از n توپ با شماره‌های n،... ،۱،۲ به تصادف ۳ توپ بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال اینکه اولین توپ شماره‌ای کوچک‌تر از دومین توپ داشته باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۱}{n}$

۶۴- ظرفی شامل ۲ مهرهٔ قرمز، ۲ مهرهٔ آبی، یک مهرهٔ سیاه و ۴ مهرهٔ سفید است. به‌ترتیب و به تصادف بدون جایگذاری از ظرف مهره خارج می‌کنیم. احتمال اینکه سومین مهره سفید در بار هفتم ظاهر شود، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۹}$

۲) $\frac{۵}{۲۱}$

۳) $\frac{۵}{۱۸}$

۴) $\frac{۵}{۴۲}$

۶۵- فرض کنید $B_۱, B_۲, ..., B_n$ پیشامدهای مستقل روی یک فضای نمونه‌ای باشند که $P(B_i)=\frac{۱}{i+۱}$ برای $i = ۱,۲,...,n$ است. احتمال اینکه دقیقاً یکی از این پیشامدها رخ دهد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{n+۱}$

۲) $\frac{n}{n+۱}$

۳) $\frac{۱}{n+۱}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{i+۱}$

۴) $\frac{۱}{n+۱}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{i}$

دروس تخصصی (احتمال، آمار ریاضی، نمونه‌گیری و رگرسیون ۱):

۶۶- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. مقدار c کدام است؟

$$f(x)=c۲^{-x^۲} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

۱) $\sqrt{\frac{۲}{\pi}}$

۲) $\sqrt{\frac{\ln ۲}{\pi}}$

۳) $\sqrt{\frac{\pi}{۲}}$

۴) $\sqrt{\frac{\pi}{\ln ۲}}$

۶۷- فرض کنید $X \sim Bin(1,p)$ و F تابع توزیع X باشد. $P(F(X)=q)$ کدام است؟

۱) q

۲) q^2

۳) p

۴) p^2

۶۸- فرض کنید $X_1,...,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان $Bin(1,p)$ باشند و تعریف کنیم $N_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$، مقدار $P(N_5=2, N_8=3)$ کدام است؟

۱) $30p^3q^5$

۲) $30p^2q^6$

۳) $30p^5q^3$

۴) $30p^4q^4$

۶۹- فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت روی بازهٔ $(0,1)$ و n یک عدد طبیعی باشد. توزیع $Y=[nX]$ کدام است؟ ($[X]$ = جزء صحیح X)

۱) یکنواخت بر روی مجموعه‌ها $\{0,1,...,n-2\}$

۲) یکنواخت بر روی مجموعه‌ها $\{0,1,...,n+1\}$

۳) یکنواخت بر روی مجموعه‌ها $\{0,1,...,n\}$

۴) یکنواخت بر روی مجموعه‌ها $\{0,1,...,n-1\}$

۷۰- از ۱۰۰۰۰ واحد تولیدی یک شرکت ۱۰۰ واحد معیوب می‌باشد. احتمال تقریبی این‌که حداکثر یک معیوب در یک نمونه ۱۰۰ تایی باشد، کدام است؟

۱) e^{-1}

۲) $2e^{-1}$

۳) e^{-2}

۴) $2e^{-2}$

۷۱- فرض کنید $X \sim Exp(1)$ باشد، تابع احتمال $T=[-X]$ کدام است؟ ($[t]$ جزء صحیح t را نشان می‌دهد)

۱) $e^{-1}(1-e^{-1})^t$ برای $t=-1,-2,...$

۲) $(1-e^t)(e-1)$ برای $t=-1,-2,...$

۳) $e^t(e-1)$ برای $t=-1,-2,...$

۴) $e^{-1}(1-e^{-1})^t$ برای $t=+1,+2,...$

۷۲- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین λ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار و دلخواه باشد. مقدار $\frac{E(Xg(X))}{E(g(X+1))}$ کدام است؟

۱) λ

۲) $\lambda(\lambda-1)$

۳) λ^2

۴) $\lambda(\lambda+1)$

۷۳- فرض کنید تابع مولد گشتاور X برابر با $M_X(t)=\frac{1}{81}(e^t+2)^4$ باشد، مقدار $P(X\le 1)$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{81}$

۲) $\frac{16}{27}$

۳) $\frac{8}{81}$

۴) $\frac{32}{81}$

۷۴- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد. با تعریف متغیر تصادفی $Y=a+bX+cX^2$، مقدار $corr(X,Y)$ کدام است؟

۱) ۰

۲) $\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$

۳) $\frac{b}{\sqrt{b^2+2c^2}}$

۴) $\frac{b+c}{\sqrt{b^2+2c^2}}$

۷۵- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0,1)$ باشد. مقدار $cov(X_1^2,\bar{X}^2)$ کدام است؟ ($\bar{X}$ = میانگین نمونه‌ای)

۱) $\frac{n+1}{n^2}$

۲) $\frac{2}{n^2}$

۳) $\frac{1}{n^2}$

۴) $2n^2$

۷۶- فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد. مقدار $P(\frac{[X]}{۱+[X]}>\frac{۲}{۳})$ کدام است؟ ($[t]$ جزء صحیح t را نشان می‌دهد)

$$f(x)=\frac{۱}{(۱+x)^۲} \quad , \quad x>۰$$

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

۷۷- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان یکنواخت روی مجموعهٔ $\{۱,۲,...,n\}$ باشند. مقدار $P(X<Y)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{n^۲-۱}{۲n}$

۳) $\frac{n+۱}{۲n}$

۴) $\frac{n-۱}{۲n}$

۷۸- فرض کنید $X\sim N(۱,۱)$ باشد. مقدار $E(X+۱||X-۱|)$ کدام است؟

۱) -۲

۲) -۱

۳) ۱

۴) ۲

۷۹- عددی را به تصادف از بازهٔ $(۰,۱)$ انتخاب و آن را با X نمایش می‌دهیم. سپس عدد دیگری را به تصادف از بازهٔ $(۰,X)$ انتخاب می‌کنیم. اگر Y نمایانگر متغیر تصادفی محل نقطهٔ دوم باشد، مقدار $P(۴Y>X)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

۸۰- فرض کنید $X \sim Beta(۲,۱)$ و $Y|X=x \sim Exp(\frac{۱}{x})$ باشد. مقدار $cov(X,Y)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$

۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۱۸}$

۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۸۱- فرض کنید (X,Y) دارای توزیع نرمال دومتغیره باشند. شرط لازم و کافی برای استقلال $X-Y$ و $X+Y$ کدام است؟

۱) $var(X)=var(Y)$

۲) $E(X)=E(Y)$

۳) $E(X)=E(Y)$ و $var(X)=var(Y)$

۴) همواره مستقل‌اند.

۸۲- فرض کنید تابع مولد گشتاور توأم متغیرهای تصادفی $X_۱$ و $X_۲$ به‌صورت زیر باشد. مقدار $P(X_۱+X_۲>۰)$ کدام است؟

$$M_{X_۱,X_۲}(t_۱,t_۲)=\exp(\frac{۱}{۲}t_۱+\frac{۱}{۲}t_۱^۲+\frac{۱}{۲}t_۲^۲-\frac{۱}{۲}t_۱t_۲)$$

۱) ۰/۶۱۷۹

۲) ۰/۶۹۱۵

۳) ۰/۳۰۸۵

۴) ۰/۳۸۲۱

۸۳- فرض کنید $X_۱,X_۲$ یک نمونهٔ تصادفی دوتایی از متغیر تصادفی X با تابع احتمال زیر باشد. مقدار $E(X_{(۲)})$ کدام است؟

x	−۱	۰	۱
f(x)	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

۱) صفر

۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{۲}{۸}$

۴) $\frac{۳}{۸}$

۸۴- اگر $X \sim U(0,1)$ و $Y|X=x \sim Bin(n,x)$ مقدار $\lim_{n\to\infty} P[Y<nX]$ کدام است؟

۱) ۰

۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) ۱

۸۵- فرض کنید $X \sim \chi^2_{(n)}$، توزیع حدی (مجانبی) $\frac{X}{n}$ کدام است؟

۱) تباهیده در نقطهٔ ۱

۲) تباهیده در نقطهٔ صفر

۳) $N(0,1)$

۴) توزیع حدی ندارد.

۸۶- فرض کنید $X_1,...,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از تابع احتمال زیر باشد. اگر $X_{(1)}=\min(X_1,...,X_n)$، $X_{(n)}=\max(X_1,...,X_n)$ و $\bar{X}=\frac{X_1+...+X_n}{n}$ باشند. آمارهٔ بسنده برای (θ,α) کدام است؟

$$f(x)=(1-\theta)\theta^{x-\alpha} \quad , x=\alpha,\alpha+1,... \quad ; 0<\theta<1 \, , a\in\mathbb{R}$$

۱) $X_{(1)}$

۲) $(X_{(1)},\bar{X})$

۳) $(\bar{X},X_{(n)})$

۴) $(X_{(1)},X_{(n)})$

۸۷- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد. آماره بسنده مینیمال θ کدام است؟ (K یک عدد ثابت نرمال‌ساز است.)

$$f_\theta(x)=K\exp\left\{-(x-\theta)^4\right\} \, , x\in\mathbb{R} \, ; \theta\in\mathbb{R}$$

۱) $(\sum_{i=1}^{n} x_i \, , \sum_{i=1}^{n} x_i^4)$

۲) $(\sum_{i=1}^{n} x_i \, , \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, , \sum_{i=1}^{n} x_i^3)$

۳) $(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, , \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \, , \sum_{i=1}^{n} x_i^4)$

۴) $(\sum_{i=1}^{n} x_i \, , \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, , \sum_{i=1}^{n} x_i^4)$

۸۸- فرض کنید $X_1,...,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از $N(\theta,1)$ باشد. اگر M میانه توزیع باشد. مقدار $E(M(\sum x_i))$ کدام است؟

۱) $2\overline{X}$

۲) M

۳) $\overline{X}$

۴) $\sum X_i$

۸۹- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $U(0,\theta)$ باشد. اگر $\hat{\theta}$ و $\tilde{\theta}$ به‌ترتیب برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی و گشتاوری برای θ باشند، مقدار $cov(\hat{\theta},\tilde{\theta})$ کدام است؟

۱) $\frac{\theta^2}{6n}$

۲) $\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$

۳) $\frac{\theta^2}{6n^2}$

۴) $\frac{\theta^2}{(n+1)(n+2)}$

۹۰- فرض کنید ۰/۳، ۰/۱۹، ۰/۲۷، ۰/۱۶ و ۰/۲۵ یافته‌های یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $U(\theta^2,\theta)$ باشد که در آن $\theta\in(0,1)$ است. برآورد(های) ماکزیمم درستنمایی (ML) برای پارامتر θ کدام است؟

۱) ۰/۳

۲) ۰/۴

۳) ۰/۳۵

۴) ۰/۳ ،۰/۴

۹۱- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $Bin(1,\theta)$ باشد که در آن $\theta\in[0,\frac{1}{2}]$ است. برآوردگر ماکزیمم درستنمایی (MLE) پارامتر θ کدام است؟

۱) $\overline{X}$

۲) $\max(\overline{X},\frac{1}{2})$

۳) $\frac{1}{2}(\overline{X}+\frac{1}{2})$

۴) $\min(\overline{X},\frac{1}{2})$

۹۲- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. UMVUE برای $\frac{1}{\theta}$ کدام است؟

$f_\theta(x) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)}$, $x>0$, $\theta>0$

۱) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i)$

۲) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$

۳) $\frac{1}{n}\ln\sum_{i=1}^{n}X_i$

۴) $\frac{1}{n}\ln\sum_{i=1}^{n}(1+X_i)$

۹۳- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(0,\theta)$ باشد. UMVUE پارامتر θ^2 کدام است؟

۱) $\frac{1}{n(n+2)}(\sum X_i)^2$

۲) $\frac{1}{n(n+1)}(\sum X_i^2)^2$

۳) $\frac{1}{n(n+2)}(\sum X_i^2)^2$

۴) $\frac{1}{n(n+2)}\sum X_i^2$

۹۴- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(\theta,1)$ باشد. UMVUE پارامتر e^θ کدام است؟

۱) $e^{\overline{X}+\frac{1}{n}}$

۲) $e^{-(\overline{X}-\frac{1}{2n})}$

۳) $e^{\overline{X}-\frac{1}{2n}}$

۴) $e^{\overline{X}-\frac{1}{n}}$

۹۵- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $Beta(\theta,1)$ باشد. کران پایین کرامر ـ رائو در برآورد نااریب پارامتر $\gamma(\theta)=P_\theta(X_1>e^{-1})$ کدام است؟

۱) $\frac{\theta e^{-\theta}}{n}$

۲) $n\theta e^{-\theta}$

۳) $n\theta^2 e^{-2\theta}$

۴) $\frac{\theta^2 e^{-2\theta}}{n}$

۹۶- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع لاگ نرمال با پارامتر μ نامعلوم و σ^2 معلوم باشد. یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ درصدی برای $\theta=e^{\mu}$ کدام است؟ ($z_{1-\alpha}$ چندک $(1-\alpha)$ توزیع نرمال استاندارد است، یعنی $P(Z\le z_{1-\alpha})=1-\alpha$)

۱) $e^{\frac{1}{n}\sum \ln X_i-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}}<\theta<e^{\frac{1}{n}\sum \ln X_i+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}}$

۲) $\bar{X}e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}}<\theta<\bar{X}e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}}$

۳) $-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}e^{\frac{1}{n}\sum \ln X_i}<\theta<\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}e^{\frac{1}{n}\sum \ln X_i}$

۴) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}<\theta<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

۹۷- فرض کنید $X_1,...,X_n$ نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu,a^2\sigma^2)$ که در آن $a>0$ معلوم و μ,σ^2 نامعلوم هستند، یک فاصلهٔ اطمینان $100(1-\alpha)$ درصدی برای μ کدام است؟

($t_{(n;1-\alpha)}$ چندک $1-\alpha$ توزیع $t_{(n)}$ است، یعنی $P(T\le t_{(n;1-\alpha)})=1-\alpha$، $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum X_i$ و $S^2=\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\bar{X})^2$)

۱) $(\bar{x}-t_{(n-1;1-\frac{\alpha}{2})}\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{(n-1;1-\frac{\alpha}{2})}\frac{S}{\sqrt{n}})$

۲) $(\bar{x}-t_{(n-1;1-\frac{\alpha}{2})}\frac{aS}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{(n-1;1-\frac{\alpha}{2})}\frac{aS}{\sqrt{n}})$

۳) $(\bar{x}-t_{(n-1;1-\frac{\alpha}{2})}\frac{S}{a\sqrt{n}},\bar{x}+t_{(n-1;1-\frac{\alpha}{2})}\frac{S}{a\sqrt{n}})$

۴) $(a\bar{x}-t_{(n-1;1-\frac{\alpha}{2})}\frac{aS}{\sqrt{n}},a\bar{x}+t_{(n-1;1-\frac{\alpha}{2})}\frac{aS}{\sqrt{n}})$

۹۸- در آزمون فرضیه براساس لم‌نیمن ـ پیرسون، افزایش احتمال ارتکاب خطای نوع اول به‌شرط ثابت بودن سایر عوامل، موجب می‌شود که ...

۱) توان آزمون کاهش یابد.

۲) احتمال ارتکاب خطای نوع دوم افزایش یابد.

۳) توان آزمون افزایش یابد.

۴) احتمال ارتکاب خطای نوع دوم ثابت باشد.

۹۹- فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونهٔ تصادفی از تابع احتمال زیر باشد. فرضیه $H_0: \theta \le \frac{1}{4}$ در مقابل $H_1: \theta > \frac{1}{4}$ رد می‌شود هرگاه $\sum_{i=1}^{3} x_i > 4$ باشد. اندازهٔ آزمون کدام است؟ $(0 < \theta < 1)$

$X=x$	-1	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1-\theta}{2}$	$\frac{1-\theta}{2}$	θ

۱) $\frac{9}{128}$

۲) $\frac{3}{128}$

۳) $\frac{11}{128}$

۴) $\frac{119}{128}$

۱۰۰- فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد. اگر N_j برابر تعداد X_i های برابر با j، $j=1,2,3$ باشد، برای آزمون فرض $H_0: \theta = \theta_0$ در مقابل $H_1: \theta = \theta_1 (> \theta_0)$، ناحیه بحرانی پرتوان‌ترین آزمون کدام است؟ $(0 < \theta < 1)$

x	1	2	3
$P_\theta(X=x)$	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

۱) $N_1 + 2N_2 \ge c$

۲) $2N_1 + N_2 \ge c$

۳) $N_1 + N_2 \ge c$

۴) $2N_1 + N_2 < c$

۱۰۱- فرض کنید تک مشاهده X دارای تابع توزیع زیر باشد. تابع آزمون پرتوان‌ترین آزمون در سطح α برای آزمون فرض $H_0:\theta=2$ در مقابل $H_1:\theta=1$ کدام است؟

$$F_\theta(x)=(1-e^{-x})^\theta \quad ,x>0 \quad ,\theta>0$$

۱) $I_{(0,-\ln\alpha)}(x)$

۲) $I_{(0,-\ln(1-\alpha))}(x)$

۳) $I_{(-\ln\alpha,\infty)}(x)$

۴) $I_{(0,-\ln(1-\sqrt{\alpha}))}(x)$

۱۰۲- فرض کنید $X\sim Ge(\theta)$ (مدل تعداد آزمایش‌ها) باشد. برای آزمون فرض $H_0:\theta=\frac{1}{8}$ در مقابل $H_1:\theta=\frac{1}{4}$ توان پرتوان‌ترین آزمون در سطح $\alpha=0/125$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$

۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{1}{8}$

۴) $\frac{7}{8}$

۱۰۳- فرض کنید $F(x)$ و $G(x)$ دو تابع توزیع پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشند. همچنین فرض کنید X یک تک‌مشاهده از تابع توزیع $H_\theta(x)=\theta F(x)+(1-\theta)G(x)$ باشد که در آن $\theta\in(0,1)$ است. این خانواده از توزیع‌ها دارای خاصیت MLR در چه آماره‌ای می‌باشد؟ (f و g تابع چگالی احتمال‌های تابع توزیع‌های به‌ترتیب F و G هستند)

۱) $T(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

۲) $T(x)=\theta_0 f(x)+(1-\theta_0)g(x)$

۳) $T(x)=f(x)+g(x)$

۴) $T(x)=\theta_1 f(x)+(1-\theta_1)g(x)$

۱۰۴- فرض کنید $X \sim Beta(\theta,1)$ باشد. برای آزمودن فرض $H_0:\theta=2$ در مقابل $H_1:\theta=1$، به روش آزمون نسبت درستنمایی (LRT)، کدام‌یک از آزمون‌های زیر، کمترین مقدار مجموع خطای نوع اول و دوم $(\alpha+\beta)$ را دارا است؟

۱) $$\phi(x)=\begin{cases}1 & x<\frac{1}{4} \text{ or } x>\frac{3}{4}\\ 0 & \text{Otherwise}\end{cases}$$

۲) $$\phi(x)=\begin{cases}1 & x>\frac{1}{2}\\ 0 & x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

۳) $$\phi(x)=\begin{cases}1 & \frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}\\ 0 & \text{Otherwise}\end{cases}$$

۴) $$\phi(x)=\begin{cases}1 & x<\frac{1}{2}\\ 0 & x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

۱۰۵- فرض کنید $Y_1,\ldots,Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند و $Y_i \sim P(\theta x_i)$، $i=1,\ldots,n_1$، که در آن $\theta>0$ پارامتر مجهول و $x_1,\ldots,x_n$ ثابت‌های معلوم هستند. برای آزمون فرض $H_0:\theta=1$ در مقابل $H_1:\theta\neq1$ آمارهٔ آزمون نسبت درستنمایی (LRT) کدام است؟

۱) $$(\frac{\sum y_i}{\sum x_i})^{\sum y_i} e^{\sum x_i-\sum y_i}$$

۲) $$(\frac{\sum x_i}{\sum y_i})^{\sum y_i} e^{\sum y_i-\sum x_i}$$

۳) $$(\frac{\sum x_i}{\sum y_i})^{\sum x_i} e^{\sum x_i-\sum y_i}$$

۴) $$(\frac{\sum y_i}{\sum x_i})^{\sum x_i} e^{\sum y_i-\sum x_i}$$

۱۰۶- شهری دارای سه منطقهٔ روستایی است. برای برآورد کل محصول گندم در این شهر هر منطقه را یک طبقه از روستاها در نظر می‌گیریم. میزان محصول گندم برحسب تن براساس یک طرح نمونه‌گیری طبقه‌بندی به شرح جدول زیر به‌دست آمده است.

منطقه	تعداد روستاها	تعداد روستاهای نمونه	میزان محصول گندم در روستاهای نمونه			
۱	۱۵	۳	۱	۲	۳	-
۲	۱۵	۳	۲	۳	۴	-
۳	۲۰	۴	۳	۳	۰	۲

یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای مقدار کل گندم در این شهر کدام است؟ ($Z_{۰/۹۷۵} = ۲$)

۱) $۱۱۵ \pm ۴\sqrt{۷۰}$

۲) $۱۱۵ \pm ۲\sqrt{۷۰}$

۳) $۱۰۵ \pm ۴\sqrt{۷۰}$

۴) $۱۰۵ \pm ۲\sqrt{۷۰}$

۱۰۷- جامعه‌ای با سه طبقه و مشخصات زیر را در نظر بگیرید. برای انتخاب نمونه‌ای تصادفی به حجم ۲۰۰ از این جامعه، حجم نمونه لازم براساس تخصیص نیمن در هر یک از طبقات کدام است؟

شماره طبقه	حجم طبقه	واریانس طبقه ($S_h^۲$)
۱	۲۰۰	۶/۲۵
۲	۲۵۰	۱۶
۳	۵۰	۱۰۰

۱) طبقهٔ اول و دوم ۷۵، طبقهٔ سوم ۵۰

۲) طبقهٔ اول و سوم ۵۰، طبقهٔ دوم ۱۰۰

۳) طبقهٔ اول ۸۰، طبقهٔ دوم ۱۰۰، طبقهٔ سوم ۲۰

۴) طبقهٔ اول ۳۶، طبقهٔ دوم ۱۱۴، طبقهٔ سوم ۵۰

۱۰۸- در یک نمونه‌گیری تصادفی بدون جایگذاری، Y_i عنصر iام جامعه‌ای به حجم N و y_i عنصر i ام نمونه‌ای به حجم n است. امید ریاضی $\sum_{i=۱}^{n} y_i^۲$ برحسب $S^۲$ (واریانس ناریب جامعه) و $\bar{Y}$ (میانگین جامعه) کدام است؟

۱) $n(N-۱)S^۲ + nN\bar{Y}^۲$

۲) $\frac{N-۱}{N}S^۲ + \bar{Y}^۲$

۳) $n(S^۲ + \bar{Y}^۲)$

۴) $\frac{n(N-۱)}{N}S^۲ + n\bar{Y}^۲$

۱۰۹- برای برآورد تعداد زائرین اربعین حسینی کربلا در یک سال معین، مشخص شد ۲ میلیون زائر ایرانی در مراسم اربعین در این شهر شرکت نموده‌اند. در این مراسم از بین کلیهٔ زائرین به تصادف و با جایگذاری آنقدر نمونه گرفتیم تا ۱۰۰۰ زائر ایرانی در نمونه انتخاب شوند، حجم نمونه لازم تا حصول این نتیجه ۱۲۵۰۰ نفر بوده است. یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای تعداد کل این زائرین حدوداً کدام است؟ ($Z_{۰/۹۷۵} \simeq ۲$)

۱) $۲۰ \mp ۲\sqrt{۰/۵۷۵}$

۲) $۲۲ \mp ۲\sqrt{۰/۷۵۷}$

۳) $۲۵ \mp ۲\sqrt{۰/۵۷۵}$

۴) $۲۸ \mp ۲\sqrt{۰/۷۵۷}$

۱۱۰- برای برآورد نسبت افراد چپ‌دست در بین کارکنان اداره‌ای با ۴۰۰ کارمند مرد و ۲۰۰ کارمند زن به‌طور جداگانه از بین آقایان ۶۰ و از بین خانم‌ها ۴۰ نفر را به تصادف انتخاب نموده‌ایم که در بین آقایان نمونه ۶ نفر و در بین خانم‌های نمونه ۱۲ نفر چپ‌دست بوده‌اند. اگر بخواهیم نسبت موردنظر را با کران خطای ۰/۰۲ براورد کنیم درصورت نیاز حدوداً چند کارمند مرد و چند کارمند زن دیگر را باید به نمونه بیفزاییم؟ ($Z_{۰/۹۷۵} \simeq ۲$)

۱) ۱۰۷ مرد و ۴۸ زن

۲) ۲۱۳ مرد و ۹۷ زن

۳) ۲۷۳ مرد و ۱۳۷ زن

۴) همین حجم نمونه کافی است.

۱۱۱- از جامعه‌ای به حجم N یک نمونهٔ تصادفی ساده بدون جایگذاری به حجم n می‌گیریم. سپس از این نمونه، مجدداً یک نمونهٔ تصادفی ساده بدون جایگذاری به حجم n^* می‌گیریم. اگر نمونه اخیر با $(y_{۱}, \ldots, y_{n^*})$ نشان داده شود، شانس استخراج این نمونه چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{\binom{N}{n-n^*}}$

۲) $\frac{\binom{N-n^*}{n-n^*}}{\binom{N}{n}}$

۳) $\frac{۱}{\binom{N-n}{n-n^*}}$

۴) $\frac{\binom{N-n^*}{n-n^*}}{\binom{N}{n}\binom{n}{n^*}}$

۱۱۲- فرض کنید در جامعه‌ای متناهی نسبت صفت A (P_A) دو برابر نسبت صفت B (P_B) باشد. اگر کارایی روش نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری برای برآورد نسبت P_A دو برابر نسبت P_B باشد، مقدار P_A کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۷}$

۲) $\frac{۳}{۷}$

۳) $\frac{۱}{۷}$

۴) $\frac{۶}{۷}$

۱۱۳- اداره‌ای ۱۲۵۰ کارمند دارد. در یک نمونه تصادفی ساده ۲۵۰ تایی تعداد فرزندان کارمند نمونهٔ انتخابی و جنسیت کارمند ثبت و نتایج جدول زیر حاصل شده است:

تعداد فرزند / جنسیت	۰	۱	۲	۳
مرد	۵۰	۱۰۰	۳۰	۲۰
زن	۲۵	۱۰	۱۰	۵

بر این اساس، تعداد کل فرزندان کارکنان زن در این اداره را چند نفر برآورد می‌کنید؟

۱) ۲۲۵

۲) ۲۴۵

۳) ۲۶۵

۴) ۱۱۲۵

۱۱۴- در یک نمونه‌گیری تصادفی ساده با جایگذاری برای برآورد نسبت خاصی در جامعه‌ای به حجم ۲۰۰، نمونه‌ای به حجم ۲۵ گرفته‌ایم. اگر برآورد ناریب واریانس برآوردگر این نسبت در جامعه برابر ۰/۰۱ باشد و بدانیم برآورد نسبت مورد نظر در جامعه کمتر از ۰/۵ است. مقدار دقیق برآورد این نسبت در جامعه چقدر است؟

۱) ۰/۱

۲) ۰/۲

۳) ۰/۳

۴) ۰/۴

۱۱۵- در شهری کوچک ۵۰ اداره وجود دارد که جمعاً ۱۰۰۰ کارمند در آنها مشغول به کار هستند. پنج اداره به تصادف، با جایگذاری و با احتمال متناسب با تعداد کارمندان انتخاب شده‌اند و پس از نظرسنجی از مدیران ادارات در مورد تغییر ساعات اداری، اطلاعات زیر به‌دست آمده است:

اداره	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد کارمندان	۲۰	۳۰	۴۰	۲۰	۵۰
نظر مدیر اداره	مخالف	موافق	موافق	مخالف	موافق

برآورد تعداد اداراتی که مدیر آنها موافق با طرح تغییر ساعات اداری در کل شهر هستند، کدام است؟

۱) ۱۵

۲) ۱۸

۳) ۲۴

۴) ۳۰

۱۱۶- در یک مدل رگرسیون خطی چندگانه برای متغیر پاسخ میزان مصرف بنزین، ۴ متغیر پیشگوی x_1: قدرت اسب بخار، x_2: طول ماشین، x_3: عرض ماشین و x_4: وزن ماشین، رابطهٔ زیر پیش‌بینی شده است:

$$\hat{y} = ۲۶ - ۰/۹۹ x_1 + ۰/۱۸ x_2 - ۰/۱۵ x_3 - ۰/۰۷ x_4$$

برآورد متوسط تغییر در مصرف بنزین به‌ازای یک واحد تغییر در طول ماشین وقتی که سایر متغیرها ثابت باشند، کدام است؟

۱) $-۰/۱۸$

۲) $۰/۸۲$

۳) $۰/۱۸$

۴) ۲۶

۱۱۷- در مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ، $i = ۱, \ldots, n$ که در آن $E(\varepsilon_i) = ۰$ و $var(\varepsilon_i) = \sigma^۲$ و $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = ۰$ به‌ازای هر $i \neq j$، مانده‌های مدل (e_iها) در کدام یک از شرایط زیر صدق می‌کنند؟

۱) واریانس ثابت دارند و هم بسته‌اند.

۲) واریانس ثابت دارند و ناهم بسته‌اند.

۳) واریانس ثابت ندارند و هم بسته‌اند.

۴) واریانس ثابت ندارند و ناهم بسته‌اند.

۱۱۸- براساس یک نمونهٔ تصادفی ۱۲تایی خلاصه اطلاعات زیر حاصل شده است. مقدار آماره آزمون F در جدول تحلیل واریانس کدام است؟

$$SSX = \sum_{i=۱}^{۱۲} (x_i - \bar{x})^۲ = ۲۴ \ , \ r_{xy} = ۰/۸ \ , \ \hat{y}_i = ۶ + ۲ x_i$$

۱) $\frac{۱۵}{۸}$

۲) $\frac{۱۵۰}{۸}$

۳) $\frac{۱۶۰}{۹}$

۴) $\frac{۱۶}{۹}$

۱۱۹- در مدل رگرسیونی $y_i = \frac{x_i}{\beta_0 x_i + \beta_1 + x_i \varepsilon_i}$، $i = 1, \ldots, n$، برآورد β_1 به روش کم‌ترین توان‌های دوم، کدام است؟

۱) $\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})}{y_i}}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

۲) $\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{x_i y_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{x_i^2} - (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i})^2}$

۳) $\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

۴) $\frac{\sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{x_i} - \frac{1}{\bar{x}})(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{\bar{y}})}{\sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{x_i} - \frac{1}{\bar{x}})^2}$

۱۲۰- در برازش مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$، $i = 1, \ldots, 4$، اطلاعات زیر موجود است. مقدار $\hat{y}_4$ کدام است؟

y_i (مقدار پاسخ)	۳	۲	۱	۴
$\hat{y}_i$ (مقدار برازش شده)	۳/۰۱	۱/۹۹	۱/۲	$\hat{y}_4$

۱) ۳/۲۲

۲) ۳/۸

۳) ۳/۹۴

۴) اطلاعات کافی نیست.

۱۲۱- در رگرسیون خطی گذر از مبدأ به‌صورت $y_i=\beta_1 x_i+\varepsilon_i$ ، $i=1,\dots,n$، که ε_iها مستقل و هم‌توزیع با $N(0,\sigma^2)$ است، برآورد ناریب $\mathbf{var}(\hat{\beta}_1)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\sum(y_i-\hat{y}_i)^2}{(n-2)\sum x_i^2}$

۲) $\dfrac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{(n-1)\sum x_i^2}$

۳) $\dfrac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{(n-2)\sum x_i^2}$

۴) $\dfrac{\sum(y_i-\hat{y}_i)^2}{(n-1)\sum x_i^2}$

۱۲۲- مدل رگرسیون خطی $y_i=\beta_0+\beta_1 A_i+\beta_2(A_i\times G_i)+\varepsilon_i$ را درنظر بگیرید که در آن، y_i میزان درآمد، A_i سن و G_i جنسیت فرد iام ($G_i=1$ برای مردان و $G_i=0$ برای زنان) است. کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

۱) با افزایش سن، متوسط درآمد مردان β_2 واحد تغییر می‌کند.

۲) متوسط درآمد زنان با افزایش سن، $|\beta_1|$ واحد افزایش می‌یابد

۳) برآورد متوسط درآمد مردی ۶۰ ساله، $60(\beta_1+\beta_2)+\beta_0$، است.

۴) اگر $\beta_2>0$ باشد، متوسط درآمد مردان از زنان هم سن آنها بیشتر است.

۱۲۳- در مدل رگرسیون خطی چندگانه $y_i=\beta_0+\beta_1 x_{i1}+\beta_2 x_{i2}+\beta_3 x_{i3}+\varepsilon_i$ برای $i=1,\dots,10$ اگر مقدار آماره آزمون معنی‌داری خط رگرسیونی $F=6$ باشد، چه مقدار از تغییرات متغیر پاسخ توسط مدل رگرسیونی قابل توضیح است؟

۱) ٪۷۵

۲) ٪۷۲

۳) ٪۶۶

۴) ٪۴۳

۱۲۴- در رگرسیون خطی چندگانهٔ $y_i=\beta_0+\beta_1 x_{i1}+\beta_2 x_{i2}+\varepsilon_i$ خلاصه اطلاعات زیر براساس یک نمونهٔ ۷تایی به‌دست آمده است. مقدار آمارهٔ آزمون فرض $H_0:\beta_1=\beta_2$ کدام است؟

$$(x'x)^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&9\end{bmatrix},\ SSE=36,\ SSR=421,\ \begin{bmatrix}\hat{\beta}_0\\\hat{\beta}_1\\\hat{\beta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2/5\\4\end{bmatrix}$$

۱) $\dfrac{1}{6}$

۲) $\dfrac{5}{6}$

۳) $\dfrac{1}{3}$

۴) $\dfrac{2}{3}$

۱۲۵- در یک مسئلهٔ رگرسیون خطی چندگانه با ۳ متغیر پیشگو و مشاهداتی به حجم $n = ۲۰$، اطلاعات زیر حاصل شده است. اگر مقدار SST برابر با ۸۲ باشد، آنگاه مقدار آمارهٔ آزمون $H_۰: \beta_۲ = \beta_۳ = ۰$ کدام است؟

مدل شامل	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$(x_۱, x_۲)$	$(x_۱, x_۳)$	$(x_۲, x_۳)$	$(x_۱, x_۲, x_۳)$
SSR	۱۶	۰/۱	۱۳	۱۶/۲	۳۰	۱۴	۳۲

۱) $\frac{۳۲}{۱۷}$

۲) $\frac{۶۴}{۲۵}$

۳) $\frac{۵۶}{۲۵}$

۴) $\frac{۶۸}{۲۵}$

سطح زیر منحنی نرمال استاندارد

z	0.0	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

مقادیر بحرانی توزیع t

df	.10	.05	.025	.01	.005
1	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756

مقادیر بحرانی توزیع مربع کای

df	.995	.990	.975	.950	.050	.025	.010	.005
1	4E-5	0.0001	0.0009	0.0039	3.8414	5.0238	6.6349	7.879
2	0.010	0.0201	0.0506	0.1025	5.9914	7.3777	9.2103	10.596
3	0.071	0.1148	0.2158	0.3518	7.8147	9.3484	11.344	12.838
4	0.206	0.2971	0.4844	0.7107	9.4877	11.143	13.276	14.860
5	0.411	0.5543	0.8312	1.1454	11.070	12.832	15.086	16.749
6	0.675	0.8720	1.2373	1.6353	12.591	14.449	16.811	18.547
7	0.989	1.2390	1.6898	2.1673	14.067	16.012	18.475	20.277
8	1.344	1.6465	2.1797	2.7326	15.507	17.534	20.090	21.954
9	1.734	2.0879	2.7003	3.3251	16.918	19.022	21.665	23.589
10	2.155	2.5582	3.2469	3.9403	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.0534	3.8157	4.5748	19.675	21.920	24.724	26.756
12	3.073	3.5705	4.4037	5.2260	21.026	23.336	26.216	28.299
13	3.565	4.1069	5.0087	5.8918	22.362	24.735	27.688	29.819
14	4.074	4.6604	5.6287	6.5706	23.684	26.118	29.141	31.319
15	4.600	5.2293	6.2621	7.2609	24.995	27.488	30.577	32.801
16	5.142	5.8122	6.9076	7.9616	26.296	28.845	31.999	34.267
17	5.697	6.4077	7.5641	8.6717	27.587	30.191	33.408	33.718
18	6.264	7.0149	8.2307	9.3904	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.843	7.6327	8.9065	10.117	30.143	32.852	36.190	38.582
20	7.433	8.2604	9.5907	10.850	31.410	34.169	37.566	39.996
21	8.033	8.8972	10.282	11.591	32.670	35.478	38.932	41.401
22	8.642	9.5424	10.982	12.338	33.924	36.780	40.289	42.795
23	9.260	10.195	11.688	13.090	35.172	38.075	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.979	45.558
25	10.52	11.523	13.119	14.611	37.652	40.646	44.314	46.927
26	11.16	12.198	13.843	15.379	38.885	41.923	45.641	48.289
27	11.80	12.878	14.573	16.151	40.113	43.194	46.962	49.644
28	12.46	13.564	15.307	16.927	41.337	44.460	48.278	50.993
29	13.12	14.256	16.047	17.708	42.556	45.722	49.587	52.335
30	13.78	14.953	16.790	18.492	43.772	46.979	50.892	53.671